

УДК 512.5+512.64+519.1

Оценки, связанные с теоремой Ширшова о высоте

Харитонов Михаил Игоревич¹

Работа посвящена 80-летию
профессора В. Н. Латышева

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда Дмитрия Зимина “Династия” и фонда О.В. Дерипаски; исследование поддержано грантом РФФИ №14-01-00548.

Оглавление

1	Проблемы Бернсайдовского типа и тождества в теории колец	4
1.1	Теория колец в контексте проблематики Бернсайдовского типа	4
1.2	Неассоциативные обобщения	8
1.3	Базисы Ширшова	9
1.4	Существенная высота	9
1.5	Строение векторов степеней	10
1.6	n -разбиваемость, обструкции и теорема Дилуорса	10
1.7	Оценки высоты	11
1.8	Основные результаты	12
1.9	О нижних оценках	13
2	Оценки индекса нильпотентности конечно порождённых алгебр с нильтождеством	15
2.1	Оценки на появление степеней подслов	15
2.1.1	План доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности	15
2.1.2	Свойства периодичности и n -разбиваемости	15
2.2	Оценки на появление периодических фрагментов	19
2.2.1	Применение теоремы Дилуорса.	19
2.2.2	Наборы $B^p(i)$, процесс на позициях	19
2.2.3	Завершение доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности	20
3	Оценки высоты и существенной высоты конечно порождённой PI-алгебры.	22
3.1	Оценка существенной высоты.	22
3.1.1	Нахождение различных периодических фрагментов в слове	22
3.1.2	Применение теоремы Дилуорса	23
3.1.3	Наборы $C^\alpha(i)$, процесс на позициях	24
3.1.4	Завершение доказательства субэкспоненциальности существенной высоты	25
3.2	Оценка высоты в смысле Ширшова	26

3.2.1	План доказательства	26
3.2.2	Суммирование существенной высоты и степени нильпотентности . . .	26
3.2.3	Завершение доказательства субэкспоненциальности высоты	28
4	Оценки кусочной периодичности	29
4.1	План улучшения оценок существенной высоты	29
4.2	Доказательство верхних оценок выборочной высоты	30
4.2.1	Периоды длины два	30
4.2.2	Периоды длины три	31
4.2.3	Завершение доказательства теоремы 4.1.3	33
4.2.4	Периоды длины, близкой к степени тождества в алгебре	33
4.2.5	Завершение доказательства теоремы 4.1.4	34
4.3	Нижняя оценка малой выборочной высоты над периодами длины два	35
4.4	Оценка существенной высоты с помощью выборочной высоты	35
5	Оценки числа перестановочно упорядоченных множеств	39
5.1	Введение и основные понятия	39
5.2	Алгебраические обобщения	41
5.3	Доказательство основных результатов	41
5.4	Обобщенные диаграммы Юнга и их производящие функции	44
6	Дальнейшее улучшение оценок высоты	46
	Приложение 1. Комбинаторика слов	49
	Приложение 2. Алгоритмические методы в теории колец	51
	Предметный указатель	55
	Список литературы	57

Глава 1

Проблемы Бернсайдовского типа и тождества в теории колец

1.1 Теория колец в контексте проблематики Бернсайдовского типа

Дальнейшее развитие теории периодических групп требует решения следующей проблемы, поставленной Бернсайдом:

Проблема 1.1.1 ([1]). *Будет ли конечной всякая периодическая конечно порождённая группа?*

Первоначальные усилия были направлены в сторону положительного решения проблемы, так как все известные частные случаи давали позитивный ответ. Например, если группа порождена m элементами и порядок каждого её элемента является делителем числа 4, она конечна. Первый контрпример к “неограниченной” проблеме был найден Е. С. Голодом в 1964 году на основе универсальной конструкции Голода–Шафаревича. Вопрос о локальной конечности групп с тождеством $x^n = 1$ был решен отрицательно в знаменитых работах П. С. Новикова и С. И. Адяна (1968): было доказано существование для любого нечетного $n \geq 4381$ бесконечной группы с $m > 1$ образующими, удовлетворяющей тождеству $x^n = 1$. Эта оценка была улучшена до $n \geq 665$ С. И. Адяном (1975). Позднее А. Ю. Ольшанский предложил геометрически наглядный вариант доказательства для нечетных $n > 10^{10}$.

Построения в полугруппах, как правило, проще, чем в группах. Например, вопрос о существовании конечно порождённой ниль-полугруппы, то есть полугруппы, каждый элемент которой в некоторой степени обращается в нуль, имеет тривиальный положительный ответ: уже в алфавите из двух букв имеются слова сколь угодно большой длины, не содержащие трех подряд одинаковых подслов (кубов). Этот факт был независимо доказан А. Туэ ([81]) и М. Морсом ([82]).

Теорема 1.1.1 (Морс–Туэ). *Пусть $X = \{a, b\}$, X^* — множество слов над алфавитом X , подстановка φ задана соотношениями $\varphi(a) = ab$, $\varphi(b) = ba$. Тогда если слово $w \in X^*$ — бескубное, то и $\varphi(w)$ — бескубное.*

В дальнейшем этот результат был усилен Туэ:

Теорема 1.1.2 (Туэ–1, [81]). Пусть $X = \{a, b, c\}$, X^* — множество слов над алфавитом X , подстановка φ задана соотношениями $\varphi(a) = abcab$, $\varphi(b) = acabcb$, $\varphi(c) = acbcsb$. Тогда если слово $w \in X^*$ — бесквадратное, то и $\varphi(w)$ — бесквадратное.

Теорема 1.1.3 (Туэ–2). Пусть L и N — алфавиты, N^* — множество слов над алфавитом N , для подстановки $\varphi : L \rightarrow N^*$ выполнены следующие условия:

1. если длина w не больше 3, то $\varphi(w)$ — бесквадратное;
2. если a, b — буквы алфавита L , а $\varphi(a)$ — подслово $\varphi(b)$, то $a = b$.

Тогда если слово $w \in L^*$ — бесквадратное, то и $\varphi(w)$ — бесквадратное.

Полное алгоритмическое описание бесквадратных подстановок было впервые получено Дж. Берстелем ([83, 84]). В дальнейшем Крошмором было предложено следующее описание:

Теорема 1.1.4 (Крошмор, [85]). Пусть L и N — алфавиты, N^* — множество слов над алфавитом N , $\varphi : L \rightarrow N^*$ — подстановка, M — наибольший размер образа буквы алфавита L при подстановке φ , m — наименьший размер образа буквы L при той же подстановке, $k = \max\{3, 1 + [(M - 3)/m]\}$. Тогда подстановка φ — бесквадратная в том и только в том случае, когда для любого бесквадратного слова w длины $\leq k$ слово $\varphi(w)$ будет бесквадратным.

Обзор проблем Бернсайдского типа в теории колец проведён в монографии М. Сапира ([65]) и статье А. Я. Белова ([47]).

Проблема Бернсайда для ассоциативных алгебр была сформулирована А. Г. Курошем в тридцатых годах двадцатого века:

Вопрос 1.1.1. Пусть все 1-порождённые подалгебры конечно порождённой ассоциативной алгебры A конечномерны. Будет ли A конечномерна?

Предложение 1.1.1. Пусть A — ассоциативная K -алгебра, K — коммутативное кольцо, $a \in A$. Подалгебра, порождённая a , конечномерна тогда и только тогда, когда a — алгебраический элемент.

Отрицательный ответ был получен Е. С. Голодом в 1964 году более сложным способом, чем в случае полугрупп. Например, в полугрупповом случае найдётся 3-порождённая бесконечная полугруппа, удовлетворяющая тождеству $x^2 = 0$. Для ассоциативных алгебр над полем характеристики ≥ 3 это невозможно.

Определение 1.1.1. Классом нильпотентности, индексом нильпотентности или ниль-индексом ассоциативной алгебры A называется минимальное натуральное число n такое, что $A^n = 0$.

Теорема 1.1.5 (Курош, [2]). Любая удовлетворяющая тождеству $x^2 = 0$ алгебра над полем характеристики ≥ 3 или 0 является нильпотентной класса 3. Любая нильпотентная конечно порождённая алгебра конечномерна.

Определение 1.1.2. *Индексом алгебраической алгебры A называется супремум степеней минимальных аннулирующих многочленов элементов A .*

В 1941 году Курош в работе [2] сформулировал проблему Бернсайда алгебр конечного индекса:

Вопрос 1.1.2. 1. *Верно ли, что конечно порождённая ниль-алгебра конечного ниль-индекса нильпотентна?*

2. *Верно ли, что конечно порождённая алгебра конечного индекса конечномерна?*

В 1946 году И. Капланский [3] и Д. Левицкий [4] ответили на эти вопросы положительным образом для алгебр с допустимым полиномиальным тождеством, где полиномиальное тождество называется *допустимым*, если один из его коэффициентов не равен 1. Заметим, что в случае ассоциативных алгебр над полями любое полиномиальное тождество является допустимым.

В 1948 году И. Капланский отказался от условия конечности индекса:

Теорема 1.1.6 (Капланский, [79]). *Любая конечно порождённая алгебраическая алгебра над коммутативным кольцом, удовлетворяющая допустимому полиномиальному тождеству, конечномерна.*

Доказательства в работах [3] и [4] были проведены структурными методами. Заметим, что структурная теория, развитая в работах Ш. Амицура, И. Капланского и др., позволила решить ряд классических проблем и служит основой для дальнейших исследований. Обычная схема структурных рассуждений состояла в исследовании полупростой части (матриц над телами) и редукции к полупростой ситуации путём факторизации по радикалу. Несмотря на свою эффективность, рассуждения такого рода не являются конструктивными. Кроме того, доказательства, которые получаются с помощью структурной теории, не дают понимания происходящего “на микроуровне”, т. е. на уровне слов и соотношений между ними.

В 1958 году А. И. Ширшов доказал свою знаменитую теорему о высоте чисто комбинаторными методами [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Из теоремы Ширшова о высоте следует решение проблемы Куроша для ассоциативных PI-алгебр в усиленной форме, т.е. требование алгебраичности алгебры заменяется на требование алгебраичности слов от порождающих длины менее степени тождества в алгебре, а требование конечности отбрасывается. Таким образом, результат А. И. Ширшова есть улучшение теоремы 1.1.6.

Теорема 1.1.7 (Ширшов, [8, 9]). *Пусть $A = \langle X \rangle$ — конечно порождённая ассоциативная алгебра над коммутативным кольцом, удовлетворяющая допустимому полиномиальному тождеству степени n . Тогда найдётся число H , зависящее только от $|X|$ и n такое, что каждый элемент $a \in A$ может быть представлен как линейная комбинация слов вида $v_1^{n_1} \cdots v_h^{n_h}$, где $h \leq H$, а длина каждого слова v_i меньше n .*

Если в ассоциативной алгебре есть допустимое полиномиальное тождество, то есть и допустимое полилинейное тождество той же или меньшей степени. Доказательство этого факта можно найти в обзоре [46].

Пусть $f = 0$ — допустимое полилинейное тождество степени n . Тогда каждый моном f является произведением переменных в некотором порядке (каждая переменная встречается в точности один раз в каждом мономе). Таким образом, все мономы f получаются

из $x_1 x_2 \cdots x_n$ путём перестановки переменных. Следовательно, каждое допустимое полилинейное тождество имеет форму

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(n)},$$

где S_n — группа всех перестановок множества $\{1, \dots, n\}$, а один из коэффициентов α_{σ} равен 1.

Это тождество после переименования переменных может быть представлено в форме

$$x_1 x_2 \dots x_n = \sum_{\sigma \in S_n \setminus \{1\}} \beta_{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(n)}$$

Таким образом, каждое произведение $u_1 u_2 \cdots u_n$ элементов алгебры A есть линейная комбинация перестановок этого произведения. Пусть на словах из X^* задан некоторый частичный порядок. Рассмотрим подмножество, получающихся из X^* выбрасыванием слов, представимых в виде линейной комбинации меньших слов. Получаем, что теорему 1.1.7 можно доказывать только для этого подмножества. Таким образом доказательство теоремы 1.1.7 сводится к чистой комбинаторике.

Заметим, что верно и утверждение, обратное теоремам 1.1.6 и 1.1.7.

Известно, что в каждой ассоциативной алгебре размерности n над коммутативным кольцом выполняется так называемое *стандартное тождество* $S_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = 0$, где $S_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(n)}$, S_n — группа перестановок.

Отсюда получаем следующее предложение:

Предложение 1.1.2. *Любая конечномерная алгебра является конечно порождённой, алгебраичной и удовлетворяет допустимому полилинейному тождеству.*

Определение 1.1.3. $\text{GK}(A)$ — размерность Гельфанда–Кириллова алгебры A — определяется по правилу

$$\text{GK}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln V_A(n)}{\ln(n)},$$

где $V_A(n)$ есть функция роста алгебры A , т.е. размерность векторного пространства, порождённого словами степени не выше n от образующих A .

Следствие 1.1.1 (Berele). *Пусть A — конечно порождённая PI-алгебра. Тогда $\text{GK}(A) < \infty$.*

Обозначение 1.1.1. Обозначим как $\deg(A)$ степень алгебры, т.е. минимальную степень тождества, которое в ней выполняется. Через $\text{Pid}(A)$ обозначим сложность алгебры A , т.е. максимальное k такое, что M_k — алгебра матриц размера k — принадлежит многообразию $\text{Var}(A)$, порождённой алгеброй A .

Введём понятие высоты, частный случай которого использовался в теореме 1.1.7.

Определение 1.1.4. Назовём множество $M \subset X^*$ множеством *ограниченной высоты* $h = \text{Ht}_Y(A)$ над множеством слов $Y = \{u_1, u_2, \dots\}$, если h — минимальное число такое, что любое слово $u \in M$ либо n -разбиваемо, либо представимо в виде $u = u_{j_1}^{k_1} u_{j_2}^{k_2} \cdots u_{j_r}^{k_r}$, где $r \leq h$.

Определение 1.1.5. Назовём PI-алгебру A алгеброй *ограниченной высоты* $h = \text{Ht}_Y(A)$ над множеством слов $Y = \{u_1, u_2, \dots\}$, если h — минимальное число такое, что любое слово x из A можно представить в виде

$$x = \sum_i \alpha_i u_{j(i,1)}^{k(i,1)} u_{j(i,2)}^{k(i,2)} \cdots u_{j(i,r_i)}^{k(i,r_i)},$$

причем $\{r_i\}$ не превосходят h . Множество Y называется *базисом Ширшова* или *s-базисом* для алгебры A .

Вместо понятия *высоты* иногда удобнее пользоваться близким понятием *существенной высоты*.

Определение 1.1.6. Алгебра A имеет *существенную высоту* $h = H_{Ess}(A)$ над конечным множеством Y , называемым *s-базисом алгебры A* , если можно выбрать такое конечное множество $D \subset A$, что A линейно представима элементами вида $t_1 \cdots t_l$, где $l \leq 2h + 1$, и $\forall i (t_i \in D \vee t_i = y_i^{k_i}; y_i \in Y)$, причем множество таких i , что $t_i \notin D$, содержит не более h элементов. Аналогично определяется *существенная высота* множества слов.

Говоря неформально, любое длинное слово есть произведение периодических частей и “прокладок” ограниченной длины. Существенная высота есть число таких периодических кусков, а обычная еще учитывает “прокладки”.

В связи с теоремой о высоте возникли следующие вопросы:

1. На какие классы колец можно распространить теорему о высоте?
2. Над какими Y алгебра A имеет ограниченную высоту? В частности, какие наборы слов можно взять в качестве $\{v_i\}$?
3. Как устроен вектор степеней (k_1, \dots, k_h) ? Прежде всего: какие множества компонент этого вектора являются существенными, т.е. какие наборы k_i могут быть одновременно неограниченными? Какова существенная высота? Верно ли, что множество векторов степеней обладает теми или иными свойствами регулярности?
4. Как оценить высоту?

Перейдем к обсуждению поставленных вопросов.

1.2 Неассоциативные обобщения

Теорема о высоте была распространена на некоторые классы колец, близких к ассоциативным. С. В. Пчелинцев [19] доказал ее для альтернативного и $(-1, 1)$ случаев, С. П. Мищенко [20] получил аналог теоремы о высоте для алгебр Ли с разреженным тождеством. В работе автора [21] теорема о высоте была доказана для некоторого класса колец, асимптотически близких к ассоциативным, куда входят, в частности, альтернативные и йордановы PI-алгебры.

1.3 Базисы Ширшова

Теорема 1.3.1 (А. Я. Белов). *а) Пусть A — градуированная PI-алгебра, Y — конечное множество однородных элементов. Тогда если при всех n алгебра $A/Y^{(n)}$ нильпотентна, то Y есть s -базис A . Если при этом Y порождает A как алгебру, то Y — базис Ширшова алгебры A .*

б) Пусть A — PI-алгебра, $M \subseteq A$ — некоторое куросево подмножество в A . Тогда M — s -базис алгебры A .

$Y^{(n)}$ обозначает идеал, порождённый n -ыми степенями элементов из Y . Множество $M \subset A$ называется *куросевым*, если любая проекция $\pi: A \otimes K[X] \rightarrow A'$, в которой образ $\pi(M)$ цел над $\pi(K[X])$, конечномерна над $\pi(K[X])$. Мотивировкой этого понятия служит следующий пример. Пусть $A = \mathbb{Q}[x, 1/x]$. Любая проекция π такая, что $\pi(x)$ алгебраичен, имеет конечномерный образ. Однако множество $\{x\}$ не является s -базисом алгебры $\mathbb{Q}[x, 1/x]$. Таким образом, ограниченность существенной высоты есть некоммутативное обобщение свойства *целости*.

Описание базисов Ширшова, состоящих из слов, заключено в следующей теореме:

Теорема 1.3.2 ([13, 22]). *Множество слов Y является базисом Ширшова алгебры A тогда и только тогда, когда для любого слова u длины не выше $m = \text{Pid}(A)$ — сложности алгебры A — множество Y содержит слово, циклически сопряженное к некоторой степени слова u .*

Аналогичный результат был независимо получен Г. П. Чекану и В. Дренски. Вопросы, связанные с локальной конечностью алгебр, с алгебраическими множествами слов степени не выше сложности алгебры, исследовались в работах [17, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. В этих же работах обсуждались вопросы, связанные с обобщением теоремы о независимости.

1.4 Существенная высота

Ясно, что размерность Гельфанда–Кириллова оценивается существенной высотой и что s -базис является базисом Ширшова тогда и только тогда, когда он порождает A как алгебру. В представимом случае имеет место и обратное утверждение.

Теорема 1.4.1 (А. Я. Белов, [13]). *Пусть A — конечно порождённая представимая алгебра и пусть $H_{\text{Ess}Y}(A) < \infty$. Тогда $H_{\text{Ess}Y}(A) = \text{GK}(A)$.*

Следствие 1.4.1 (В. Т. Марков). *Размерность Гельфанда–Кириллова конечно порождённой представимой алгебры есть целое число.*

Следствие 1.4.2. *Если $H_{\text{Ess}Y}(A) < \infty$ и алгебра A представима, то $H_{\text{Ess}Y}(A)$ не зависит от выбора s -базиса Y .*

В этом случае размерность Гельфанда–Кириллова также равна существенной высоте в силу локальной представимости относительно свободных алгебр.

1.5 Строение векторов степеней

Хотя в представимом случае размерность Гельфанда–Кириллова и существенная высота ведут себя хорошо, тем не менее даже тогда множество векторов степеней может быть устроено плохо — а именно, может быть дополнением к множеству решений системы экспоненциально-полиномиальных диофантовых уравнений [13]. Вот почему существует пример представимой алгебры с трансцендентным рядом Гильберта. Однако для относительно свободной алгебры ряд Гильберта рационален [29].

1.6 n -разбиваемость, обструкции и теорема Дилуорса

Значение понятия n -разбиваемости выходит за рамки проблематики, относящейся к проблемам бернсайдовского типа. Оно играет роль и при изучении полилинейных слов, в оценке их количества, где *полилинейным* называется слово, в которое каждая буква входит не более одного раз. В. Н. Латышев применил теорему Дилуорса для получения оценки числа не являющихся m -разбиваемыми полилинейных слов степени n над алфавитом $\{a_1, \dots, a_n\}$ (см. [60]). Эта оценка: $(m-1)^{2n}$ и она близка к реальности. Напомним эту теорему.

Теорема 1.6.1 (Дилуорс, [5]). *Пусть n — наибольшее количество элементов антицепи данного конечного частично упорядоченного множества M . Тогда M можно разбить на n попарно непересекающихся цепей.*

Рассмотрим полилинейное слово W из n букв. Положим $a_i \succ a_j$, если $i > j$ и буква a_i стоит в слове W правее a_j . Условие не m -разбиваемости означает отсутствие антицепи из m элементов. Тогда по теореме Дилуорса все позиции (и, соответственно, буквы a_i) разбиваются на $(m-1)$ цепь. Сопоставим каждой цепи свой цвет. Тогда раскраска позиций и раскраска букв однозначно определяет слово W . А число таких раскрасок не превосходит $(m-1)^n \times (m-1)^n = (m-1)^{2n}$. Улучшение этой оценки и другие вопросы, связанные с полилинейными словами, рассматриваются в главе 5.

В. Н. Латышев ([60]) с помощью приведённых оценок провёл прозрачное доказательство теоремы Регева:

Теорема 1.6.2 (Регев, [80]). *Если алгебры A и B удовлетворяют полиномиальному тождеству, то алгебра $A \otimes_F B$ также удовлетворяет полиномиальному тождеству.*

Вопросы, связанные с перечислением полилинейных слов, не являющихся n -разбиваемыми, имеют самостоятельный интерес. (Например, существует биекция между не 3-разбиваемыми словами и числами Каталана.) С одной стороны, это чисто комбинаторная задача, с другой стороны, она связана с рядом коразмерностей для алгебры общих матриц. Исследование полилинейных слов представляется чрезвычайно важным.

В 1950 году Шпехт (см. [64]) поставил проблему существования бесконечно базируемого многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики 0. Решение проблемы Шпехта для нематричного случая представлено в докторской диссертации В. Н. Латышева [61]. Рассуждения В. Н. Латышева основывались на применении техники частично упорядоченных множеств. А. Р. Кемер (см. [58]) доказал, что каждое многообразие ассоциативных алгебр конечно базируемо, тем самым решив проблему Шпехта.

Первые примеры бесконечно базируемых ассоциативных колец были получены А. Я. Беловым ([53]), А. В. Гришиным ([57]) и В. В. Щиголевым ([63]).

Введём теперь некоторый порядок на словах алгебры над полем. Назовём *обструкцией* полилинейное слово, которое

- является уменьшаемым (т. е. является комбинацией меньших слов);
- не имеет уменьшаемых подслов;
- не является изотонным образом уменьшаемого слова меньшей длины.

В. Н. Латышев ([32]) поставил проблему конечной базируемости множества старших полилинейных слов для T -идеала относительно взятия надслов и изотонных подстановок.

Вопрос 1.6.1 (Латышев). *Верно ли, что количество обструкций для полилинейного T -идеала конечно?*

Из проблемы Латышева вытекает полилинейный случай проблемы конечной базируемости для алгебр над полем конечной характеристики. Наиболее важной обструкцией является обструкция $x_n x_{n-1} \dots x_1$, её изотонные образы составляют множество не n -разбиваемых слов.

В связи с этими вопросами возникает проблема:

Вопрос 1.6.2. *Перечислить количество полилинейных слов, отвечающих данному конечному набору обструкций. Доказать элементарность соответствующей производящей функции.*

Также имеется тесная связь с проблемой слабой нётеровости групповой алгебры бесконечной финитарной симметрической группы над полем положительной характеристики (для нулевой характеристики это было установлено А. Залесским). Для решения проблемы Латышева надо уметь переводить свойства T -идеалов на язык полилинейных слов. В работах [13, 21] была предпринята попытка осуществить программу перевода структурных свойств алгебр на язык комбинаторики слов. На язык полилинейных слов такой перевод осуществить проще, в дальнейшем можно получить информацию и о словах общего вида.

В работе техника В. Н. Латышева переносится на неполилинейный случай, что позволяет получить субэкспоненциальную оценку в теореме Ширшова о высоте. Г. Р. Челноков предложил идею этого переноса в 1996 году.

1.7 Оценки высоты

Первоначальное доказательство А. И. Ширшова хотя и было чисто комбинаторным (оно основывалось на технике элиминации, развитой им в алгебрах Ли, в частности, в доказательстве теоремы о свободе), однако оно давало только упрощённые рекурсивные оценки. Позднее А. Т. Колотов [33] получил оценку на $\text{Ht}(A) \leq l^n$ (Здесь и далее: $n = \deg(A)$, l — число образующих). А. Я. Белов в работе [35] показал, что $\text{Ht}(n, l) < 2nl^{n+1}$. Экспоненциальная оценка теоремы Ширшова о высоте изложена также в работах [22, 36, 37]. Данные оценки улучшались в работах А. Клейна [39, 40]. В 2001 году Е. С. Чибриков в работе [49] доказал, что $\text{Ht}(4, l) \geq (7k^2 - 2k)$. Верхние и нижние оценки на структуру кусочной периодичности, полученные М. И. Харитоновым в работах [51, 37], изложены в главе 4.

В работе [68] рассматривается связь между высотой конечных и бесконечных полей одинаковой характеристики. Пусть A — ассоциативная алгебра над конечным полем \mathbb{F}

из q элементов и тождеством степени n . Тогда доказано, что если $q \geq n$, то индекс нильпотентности алгебры будем таким же, что и в случае бесконечного поля. Если же $q = n - 1$, то индексы нильпотентности в случае поля \mathbb{F} и бесконечного поля отличается не более, чем на 1.

В 2011 году А. А. Лопатин [48] получил следующий результат:

Теорема 1.7.1. *Пусть $C_{n,l}$ — степень нильпотентности свободной l -порождённой алгебры и удовлетворяющей тождеству $x^n = 0$. Пусть p — характеристика базового поля алгебры — больше чем $n/2$. Тогда*

$$(1) : C_{n,l} < 4 \cdot 2^{n/2} l.$$

По определению $C_{n,l} \leq \Psi(n, n, l)$.

Заметим, что для малых n оценка (1) меньше, чем полученная в данной работе оценка $\Psi(n, n, l)$, но при росте n оценка $\Psi(n, n, l)$ асимптотически лучше оценки (1).

Е. И. Зельманов поставил следующий вопрос в Днестровской тетради [34] в 1993 году:

Вопрос 1.7.1. *Пусть $F_{2,m}$ — свободное 2-порождённое ассоциативное кольцо с тождеством $x^m = 0$. Верно ли, что класс нильпотентности кольца $F_{2,m}$ растёт экспоненциально по m ?*

В работе получен следующий ответ на вопрос Е. И. Зельманова: в действительности искомый класс нильпотентности растёт субэкспоненциально.

1.8 Основные результаты

В работе получен ответ на вопрос ?? Е. И. Зельманова: в действительности искомый класс нильпотентности растёт субэкспоненциально.

Теорема 1.8.1. *Высота множества не n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества слов длины меньше n не превышает $\Phi(n, l)$, где*

$$\Phi(n, l) = 2^{96} l \cdot n^{12 \log_3 n + 36 \log_3 \log_3 n + 91}.$$

Из данной теоремы путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $n \rightarrow \infty$

$$\Phi(n, l) = n^{12(1+o(1)) \log_3 n},$$

а при фиксированном n и $l \rightarrow \infty$

$$\Phi(n, l) < C(n)l.$$

Также доказательство этих результатов содержится в работе [52].

Следствие 1.8.1. *Высота l -порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n не превышает $\Phi(n, l)$.*

Как следствие получаются субэкспоненциальные оценки на индекс нильпотентности l -порождённых ниль-алгебр степени n для произвольной характеристики.

Другим основным результатом диссертации является следующая теорема:

Теорема 1.8.2. Пусть l, n и $d \geq n$ — некоторые натуральные числа. Тогда все l -порождённые слова длины не меньше, чем $\Psi(n, d, l)$, либо содержат x^d , либо являются n -разбиваемыми, где

$$\Psi(n, d, l) = 2^{27} l (nd)^{3 \log_3(nd) + 9 \log_3 \log_3(nd) + 36}.$$

Из данной теоремы путем некоторого огрубления и упрощения оценки получается, что при фиксированном l и $nd \rightarrow \infty$

$$\Psi(n, d, l) = (nd)^{3(1+o(1)) \log_3(nd)},$$

а при фиксированных n, d и $l \rightarrow \infty$

$$\Psi(n, d, l) < C(n, d)l.$$

Следствие 1.8.2. Пусть l, d — некоторые натуральные числа. Пусть в ассоциативной l -порождённой алгебре A выполнено тождество $x^d = 0$. Тогда ее индекс нильпотентности меньше, чем $\Psi(d, d, l)$.

Кроме того, доказывается субэкспоненциальная оценка, которая лучше при малых n и d :

Теорема 1.8.3. Пусть l, n и $d \geq n$ — некоторые натуральные числа. Тогда все l -порождённые слова длины не меньше, чем $\Psi(n, d, l)$, либо содержат x^d , либо являются n -разбиваемыми, где

$$\Psi(n, d, l) = 256l(nd)^{2 \log_2(nd) + 10} d^2.$$

Обозначение 1.8.1. Для вещественного числа x положим $\lceil x \rceil := -\lfloor -x \rfloor$. Таким образом мы округляем нецелые числа в большую сторону.

В процессе доказательства теоремы 1.8.1 доказываемая следующая теорема, оценивающая существенную высоту:

Теорема 1.8.4. Существенная высота l -порождённой PI -алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины меньше n меньше, чем $\Upsilon(n, l)$, где

$$\Upsilon(n, l) = 2n^{3 \lceil \log_3 n \rceil + 4} l.$$

1.9 О нижних оценках

Сравним полученные результаты с нижней оценкой для высоты. Высота алгебры A не меньше ее размерности Гельфанда–Кириллова $GK(A)$. Для алгебры l -порождённых общих матриц порядка n данная размерность, равна $(l-1)n^2 + 1$ (см. [42, 43]).

В то же время Амицур и Левицкий в 1950 году доказали следующий факт:

Теорема 1.9.1 (Амицур–Левицкий, [66]). Пусть S_n — группа перестановок. Определим стандартное тождество $S_n(x_1, \dots, x_n) = 0$ следующим образом: $S_n(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(n)}$. Тогда для любого натурального числа d и любого коммутативного кольца \mathbb{F} в матричной алгебре $\text{Mat}_d(\mathbb{F})$ выполняется стандартное тождество $S_{2d} = 0$.

Минимальная степень тождества алгебры l -порождённых общих матриц порядка n равна $2n$ согласно теореме Амицура–Левицкого. Имеет место следующее:

Предложение 1.9.1. *Высота l -порождённой PI-алгебры степени n , а также множества не n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом, не менее, чем $(l - 1)n^2/4 + 1$.*

Другие примеры использования теоремы Амицура–Левицкого можно найти в работе [67]

Нижние оценки на индекс нильпотентности были установлены Е. Н. Кузьминым в работе [44]. Е. Н. Кузьмин привел пример 2-порождённой алгебры с тождеством $x^n = 0$, индекс нильпотентности которой строго больше $(n^2 + n - 2)/2$. Вопрос нахождения нижних оценок рассматривается в главе 5 (см. также [51]).

В то же время для случая нулевой характеристики и счетного числа образующих Ю. П. Размыслов (см. например, [45]) получил верхнюю оценку на индекс нильпотентности, равную n^2 .

Глава 2

Оценки индекса нильпотентности конечно порождённых алгебр с ниль-тождеством

2.1 Оценки на появление степеней подслов

2.1.1 План доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности

В леммах 2.1.1, 2.1.2 и 2.1.3 описываются достаточные условия для присутствия периода длины d в не n -разбиваемом слове W . В лемме 2.1.4 связываются понятия n -разбиваемости слова W и множества его хвостов. После этого определённым образом выбирается подмножество множества хвостов слова W , для которого можно применить теорему Дилуорса. Затем мы раскрашиваем хвосты и их первые буквы в соответствии с принадлежностью к цепям, полученным при применении теоремы Дилуорса.

Необходимо изучить, в какой позиции начинают отличаться соседние хвосты в каждой цепи. Вызывает интерес, с какой “частотой” эта позиция попадает в p -хвост для некоторого $p \leq n$. Потом мы несколько обобщаем наши рассуждения, деля хвосты на сегменты по несколько букв, а затем рассматривая, в какой сегмент попадает позиция, в которой начинают отличаться друг от друга соседние хвосты в цепи. В лемме 2.2.2 связываются рассматриваемые “частоты” для p -хвостов и kp -хвостов для $k = 3$.

В завершение доказательства строится иерархическая структура на основе применения леммы 2.2.2, т. е. рассматриваем сначала сегменты n -хвостов, потом подсегменты этих сегментов и т. д. Далее рассматривается наибольшее возможное количество хвостов из подмножества, для которого была применена теорема Дилуорса, после чего оценивается сверху общее количество хвостов, а значит, и букв слова W .

2.1.2 Свойства периодичности и n -разбиваемости

Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ — алфавит, над которым проводится построение слов. Порядок $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_l$ индуцирует лексикографический порядок на словах над заданным алфавитом. Для удобства введём следующие определения:

Определение 2.1.1. а) Если в слове v содержится подслово вида u^t , то будем говорить, что в слове v содержится период длины t .

б) Если слово u является началом слова v , то такие слова называют *несравнимыми* и обозначают $u \approx v$.

в) Слово v — *хвост* слова u , если найдется слово w такое, что $u = wv$.

г) Слово v — k -*хвост* слова u , если v состоит из k первых букв некоторого хвоста u . Если в хвосте u меньше k букв, то считаем $v = u$.

г') k -*начало* то же самое, что и k -хвост.

д) Пусть слово u левее слова v , если начало слова u левее начала слова v .

Обозначение 2.1.1. а) Для вещественного числа x положим $\lceil x \rceil := -[-x]$.

б) Обозначим как $|u|$ длину слова u .

Для доказательства потребуются следующие достаточные условия наличия периода:

Лемма 2.1.1. В слове W длины x либо первые $\lceil x/d \rceil$ хвостов попарно сравнимы, либо в слове W найдется период длины d .

Доказательство. Пусть в слове W не нашлось слова вида u^d . Рассмотрим первые $\lceil x/d \rceil$ хвостов. Предположим, что среди них нашлись 2 несравнимых хвоста v_1 и v_2 . Пусть $v_1 = u \cdot v_2$. Тогда $v_2 = u \cdot v_3$ для некоторого v_3 . Тогда $v_1 = u^2 \cdot v_3$. Применяя такие рассуждения, получим, что $v_1 = u^d \cdot v_{d+1}$, так как $|u| < x/d$, $|v_2| \geq (d-1)x/d$. Противоречие. \square

Лемма 2.1.2. Если в слове V длины $k \cdot t$ не больше k различных подслов длины k , то V включает в себя период длины t .

Доказательство. Докажем лемму индукцией по k . База при $k = 1$ очевидна. Если находится не больше, чем $(k-1)$ различных подслов длины $(k-1)$, то применяем индукционное предположение. Если существуют k различных подслов длины $(k-1)$, то каждое подслово длины k однозначно определяется своими первыми $(k-1)$ буквами. Значит, $V = v^t$, где v — k -хвост V . \square

Определение 2.1.2. а) Слово W — n -разбиваемо в обычном смысле, если найдутся u_1, u_2, \dots, u_n такие, что $W = v \cdot u_1 \cdots u_n$, при этом $u_1 \succ \dots \succ u_n$. Слова u_1, u_2, \dots, u_n назовём n -разбиением слова W .

б) В текущем доказательстве слово W будем называть n -разбиваемым в хвостовом смысле, если найдутся хвосты u_1, \dots, u_n такие, что $u_1 \succ u_2 \succ \dots \succ u_n$ и для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$ начало u_i слева от начала u_{i+1} . Хвосты u_1, u_2, \dots, u_n назовём n -разбиением в хвостовом смысле слова W . В части 2, если не оговорено противное, то под n -разбиваемыми словами мы подразумеваем n -разбиваемые в хвостовом смысле.

в) Слово W — (n, d) -сократимое, если оно либо n -разбиваемо в обычном смысле, либо находится слово вида $u^d \subseteq W$.

Теперь опишем достаточное условие (n, d) -сократимости и его связь с n -разбиваемостью.

Лемма 2.1.3. Если в слове W найдутся n одинаковых непересекающихся подслов и длины $n \cdot d$, то W — (n, d) -сократимое.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим хвосты u_1, u_2, \dots, u_n слова u , которые начинаются с каждой из его первых n букв. Перенумеруем хвосты так, чтобы выполнялись неравенства: $u_1 \succ \dots \succ u_n$. Из леммы 2.1.1 они несравнимые. Рассмотрим подслово u_1 , лежащее в самом левом экземпляре слова u , подслово u_2 — во втором слева, \dots, u_n — в n -ом слева. Получили n -разбиение слова W . Противоречие. \square

Предложение 2.1.1. Если для некоторых слов u, v, w верно соотношение $|u| \leq |v| < |w|$ и, кроме того, $u \approx w, v \approx w$, то слова u и v несравнимы.

Замечание 2.1.1. Если для некоторого действительного числа a мы говорим про a -разбиваемость, то имеется ввиду $[a]$ -разбиваемость.

Лемма 2.1.4. Если слово W является $[\frac{3}{2}(n+1)d(\log_3(nd) + 2)]$ -разбиваемым, то оно — (n, d) -сократимое.

Обозначение 2.1.2. $p_{n,d} := [\frac{3}{2}(n+1)d(\log_3(nd) + 2)]$.

Доказательство. От противного. Пусть слово W является $p_{n,d}$ -разбиваемым, хвосты $u_1 \prec u_2 \prec \dots \prec u_{p_{n,d}}$ образуют $p_{n,d}$ -разбиение, но слово W — не (n, d) -сократимое.

Обозначение 2.1.3. Пусть для $1 \leq i < p_{n,d}$ слово v_i — подслово слова W , которое начинается первой буквой хвоста u_i и заканчивается буквой, стоящей на одну позицию левее первой буквы хвоста u_{i+1} . Также считаем, что $v_{p_{n,d}} = u_{p_{n,d}}$.

Предположим, что для любого числа $1 \leq i \leq [\frac{3}{2}(n-1)d(\log_3(nd) + 2)]$ найдутся числа $0 \leq j_i \leq k_i < m_i \leq q_i < [3d(\log_3(nd) + 2)]$ такие, что $\prod_{s=j_i+i}^{k_i+i} v_s \prec \prod_{s=m_i+i}^{q_i+i} v_s$. Тогда рассмотрим последовательность чисел $i_s = \frac{2s}{n}p_{n,d} + 1$, где $0 \leq s \leq [\frac{n-1}{2}]$. Тогда последовательность

слов $\prod_{s=j_{i_0}+i_0}^{k_{i_0}+i_0} v_s \prec \prod_{s=m_{i_0}+i_0}^{q_{i_0}+i_0} v_s \prec \prod_{s=j_{i_1}+i_1}^{k_{i_1}+i_1} v_s \prec \prod_{s=m_{i_1}+i_1}^{q_{i_1}+i_1} v_s \prec \prod_{s=j_{i_2}+i_2}^{k_{i_2}+i_2} v_s \prec \dots \prec \prod_{s=j_{[\frac{n-1}{2}]}+i_{[\frac{n-1}{2}]}}^{k_{[\frac{n-1}{2}]}+i_{[\frac{n-1}{2}]}} v_s \prec$

$\prod_{s=m_{[\frac{n-1}{2}]}+i_{[\frac{n-1}{2}]}}^{q_{[\frac{n-1}{2}]}+i_{[\frac{n-1}{2}]}} v_s$ образует $2[\frac{n+1}{2}]$ -разбиение в обычном смысле слова W .

Значит, слово W — (n, d) -сократимо. Противоречие.

Следовательно, найдётся такое число $1 \leq i \leq [\frac{3}{2}(n-1)d(\log_3(nd) + 2)]$, что для любых $0 \leq j \leq k < m \leq q < [3d(\log_3(nd) + 2)]$ имеем $\prod_{s=j+i}^{k+i} v_s \approx \prod_{s=m+i}^{q+i} v_s$.

Без ограничения общности $i = 1$. Для некоторого натурального t рассмотрим некоторую последовательность натуральных чисел $\{k_i\}_{i=1}^t$ такую, что $k_1 = 3$ и $\prod_{i=2}^t k_i > nd$. В силу леммы 2.1.3 $\inf_{0 < j \leq k_1 d} |v_j| \leq nd$. Пусть $\inf_{0 < j \leq k_1 d} |v_j|$ достигается на v_{j_1} , где $0 < j_1 \leq k_1 d$ (если таких минимумов несколько, то берём самый правый из них).

- Если $j_1 \leq d$, то $d|v_{j_1}|$ —начала хвостов u_{j_1} и u_{j_1+1} не пересекаются и несравнимы со словом $\prod_{j=2d+1}^{3d} v_j$ и меньше его по длине. Следовательно, по предложению 2.1.1 $d|v_j|$ —начала хвостов u_{j_1} и u_{j_1+1} несравнимы, а, значит, $v_{j_1}^d$ — подслово слова W .
- Если $d < j_1 \leq 2d$, то $d|v_j|$ —начала хвостов u_{j_1} и u_{j_1+1} не пересекаются со словом v_{3d+1} и несравнимы со словом $\prod_{j=1}^d v_j$. Кроме того, эти $d|v_j|$ —начала меньше его по длине. Значит, по предположению 2.1.1, $v_{j_1}^d$ — подслово слова W .
- Если $2d < j_1 \leq 3d$ и $d|v_j|$ —начало хвоста u_{j_1+1} не пересекается с $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$, то, аналогично предыдущему случаю, $v_{j_1}^d$ — подслово слова W . Пусть $d|v_j|$ —начало хвоста u_{j_1+1} пересекается с $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$. Тогда для некоторого натурального числа t , которое будет выбрано позднее, рассмотрим последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=2}^t$, для которой $\prod_{j=2}^t k_j \geq nd$. Выберем t так, что $\sum_{j=2}^t k_j \leq (\log_3(nd) + 1)$. Можно по-

казать, что такое t всегда существует. Заметим, что слово $\prod_{j=k_1d+1}^{(k_1+k_2)d} v_j$ содержится в $d|v_{j_1}|$ —начале хвоста $u_{j_1} + 1$. Рассмотрим v_{j_2} — слово наименьшей длины среди слов v_j при $k_1d < j \leq (k_1 + k_2)d$. Если таких слов несколько, то в качестве наименьшего возьмём самое правое из них. Тогда $|v_{j_2}| \leq \lfloor \frac{|v_{j_1}|}{k_2} \rfloor$. Теперь рассмотрим $d|v_{j_2}|$ —начало хвоста u_{j_2+1} . Если оно не пересекается со словом $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$, то $v_{j_2}^d$ — подслово слова W . В противном случае слово $\prod_{j=(k_1+k_2)d+1}^{(k_1+k_2+k_3)d} v_j$ является подсловом $d|v_{j_2}|$ —начала хвоста u_{j_2+1} .

Пусть для некоторого числа i такого, что $2 \leq i < t$ среди чисел j таких, что $d \sum_{s=1}^{i-1} k_s < j \leq d \sum_{s=1}^i k_s$ найдётся число j_i такое, что $|v_{j_i}| \leq \lfloor \frac{|v_{j_1}|}{\prod_{s=2}^i k_s} \rfloor$. Рассмотрим $d|v_{j_i}|$ —начало хвоста u_{j_i+1} . Если оно не пересекается со словом $v_{[3d(\log_3(nd)+2)]}$, то $v_{j_i}^d$ — подслово слова W . В противном случае слово $\prod_{j=d \sum_{s=1}^{i-1} k_s + 1}^{d \sum_{s=1}^i k_s} v_j$ является подсловом $d|v_{j_i}|$ —начала хвоста u_{j_i+1} . Рассмотрим $v_{j_{i+1}}$ — слово наименьшей длины среди слов v_j при $d \sum_{s=1}^i k_s < j \leq d \sum_{s=1}^{i+1} k_s$. Тогда $|v_{j_{i+1}}| \leq \lfloor \frac{|v_{j_i}|}{k_{i+1}} \rfloor \leq \lfloor \frac{|v_{j_1}|}{\prod_{s=2}^{i+1} k_s} \rfloor$. Таким образом, $|v_t| \leq \lfloor \frac{|v_{j_1}|}{\prod_{s=2}^t k_s} \rfloor < 1$. Получено противоречие, из которого и вытекает утверждение леммы.

□

Пусть W — не (n, d) -сократимое слово. Рассмотрим U — $[|W|/d]$ -хвост слова W . Тогда W — не $(p_{n,d}+1)$ -разбиваемое. Пусть Ω — множество хвостов слова W , которые начинаются в U . Тогда по лемме 2.1.1 любые два элемента из Ω сравнимы. Естественным образом строится биекция между Ω , буквами U и натуральными числами от 1 до $|\Omega| = |U|$.

Введем слово θ такое, что θ лексикографически меньше любого слова.

Замечание 2.1.2. В текущем доказательстве теоремы 1.8.2 все хвосты мы предполагаем лежащими в Ω .

2.2 Оценки на появление периодических фрагментов

2.2.1 Применение теоремы Дилуорса.

Для хвостов u и v положим $u < v$, если $u \prec v$ и, кроме того, u левее v . Тогда по теореме Дилуорса Ω можно разбить на $p_{n,d}$ цепей, где в каждой цепи $u \prec v$, если u левее v . Покрасим начальные позиции хвостов в $p_{n,d}$ цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Фиксируем натуральное число p . Каждому натуральному числу i от 1 до $|\Omega|$ сопоставим $B^p(i)$ — упорядоченный набор из $p_{n,d}$ слов $\{f(i, j)\}$, построенных по следующему правилу:

Для каждого $j = 1, 2, \dots, p_{n,d}$ положим

$$f(i, j) = \{\max f \leq i : f \text{ раскрашено в цвет } j\}.$$

Если такого f не найдется, то слово из $B^p(i)$ на позиции j считаем равным θ , в противном случае это слово считаем равным p -хвосту, который начинается с $f(i, j)$ -ой буквы.

Неформально говоря, мы наблюдаем, с какой скоростью хвосты “эволюционируют” в своих цепях, если рассматривать последовательность позиций слова W как ось времени.

2.2.2 Наборы $B^p(i)$, процесс на позициях

Лемма 2.2.1 (О процессе). Дана последовательность S длины $|S|$, составленная из слов длины $(k - 1)$. Каждое из них состоит из $(k - 2)$ символа “0” и одной “1”. Пусть S удовлетворяет следующему условию: если для некоторого $0 < s \leq k - 1$ найдутся $p_{n,d}$ слов, в которых “1” стоит на s -ом месте, то между первым и $p_{n,d}$ -ым из этих слов найдется слово, в котором “1” стоит строго меньше, чем на s -ом месте; $L(k - 1) = \sup_S |S|$.

Тогда $L(k - 1) \leq p_{n,d}^{k-1} - 1$.

Доказательство. $L(1) \leq p_{n,d} - 1$. Пусть $L(k - 1) \leq p_{n,d}^{k-1} - 1$. Покажем, что $L(k) \leq p_{n,d}^k - 1$. Рассмотрим слова, у которых символ “1” стоит на первом месте. Их не больше $p_{n,d} - 1$. Между любыми двумя из них, а также перед первым и после последнего, количество слов не больше $L(k - 1) \leq p_{n,d}^{k-1} - 1$. Получаем, что

$$L(k) \leq p_{n,d} - 1 + (p_{n,d}) \left((p_{n,d})^{k-1} - 1 \right) = (p_{n,d})^k - 1$$

□

Нам требуется ввести некоторую величину, которая бы численно оценивала скорость “эволюции” наборов $B^p(i)$:

Определение 2.2.1. Положим

$$\psi(p) := \{\max k : B^p(i) = B^p(i + k - 1)\}.$$

В частности, по лемме 2.1.2, $\psi(p_{n,d}) \leq p_{n,d}d$.

Для заданного α определим разбиение последовательности первых $|\Omega|$ позиций i слова W на классы эквивалентности AC_α следующим образом: $i AC_\alpha j$, если $B^\alpha(i) = B^\alpha(j)$.

Предложение 2.2.1. Для любых натуральных $a < b$ имеем $\psi(a) \leq \psi(b)$.

Лемма 2.2.2 (Основная). Для любых натуральных чисел a, k верно неравенство

$$\psi(a) \leq p_{n,d}^k \psi(k \cdot a) + k \cdot a$$

Доказательство. Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $AC_{k \cdot a}$. Получена последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все i_j и $B^{k \cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по AC_a . Пусть он состоит из $B^{k \cdot a}(i_j)$ при $i_j \in [b, c)$. Обозначим за $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j \in [b, c - k \cdot a)$.

Фиксируем некоторое натуральное число $r, 1 \leq r \leq p_{n,d}$. Назовём все $k \cdot a$ -начала цвета r , начинающиеся с позиций слова W из $\{i_j\}'$, представителями типа r . Все представители типа r будут попарно различны, так как они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $AC_{k \cdot a}$. Разобьём каждый представитель типа r на k сегментов длины a . Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа r слева направо числами от нуля до $(k - 1)$. Если найдутся $(p_{n,d} + 1)$ представителей типа r , у которых совпадают первые $(t - 1)$ сегментов, но которые попарно различны в t -ом, где t — натуральное число, $1 \leq t \leq k - 1$, то найдутся две первых буквы t -го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по AC_a .

Применим лемму 2.2.1 следующим образом: во всех представителях типа r , кроме самого правого, будем считать сегменты *единичными*, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа r отличается от предыдущего. Остальные сегменты считаем *нулевыми*.

Теперь можно применить лемму о процессе с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более $p_{n,d}^{k-1}$ представителей типа r . Тогда в последовательности $\{i_j\}$ будет не более $p_{n,d}^k$ членов. Таким образом, $c - b \leq p_{n,d}^k \psi(k \cdot a) + k \cdot a$. \square

2.2.3 Завершение доказательства субэкспоненциальности индекса нильпотентности

Пусть

$$a_0 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil}, a_1 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil - 1}, \dots, a_{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} = 1.$$

При этом $|W| \leq d|\Omega| + d$ в силу леммы 2.1.1.

Так как набор $B^1(i)$ принимает не более $(1 + p_{n,d}l)$ различных значений, то $|W| \leq d(1 + p_{n,d}l)\psi(1) + d$.

По лемме 2.2.2

$$\begin{aligned} \psi(1) &< (p_{n,d}^3 + p_{n,d})\psi(3) < (p_{n,d}^3 + p_{n,d})^2\psi(9) < \dots < (p_{n,d}^3 + p_{n,d})^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} \psi(p_{n,d}) \leq \\ &\leq (p_{n,d}^3 + p_{n,d})^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} p_{n,d} d \end{aligned}$$

Подставляя $p_{n,d} = 4nd - 1$, получаем

$$|W| < 4^{5+3\log_3 4} l(nd)^{3\log_3(nd)+(5+6\log_3 4)} d^2.$$

Отсюда имеем **утверждение теоремы 1.8.2.**

Доказательство теоремы 1.8.3 завершается так же, только вместо последовательности

$$a_0 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil}, a_1 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil - 1}, \dots, a_{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} = 1$$

рассматривается последовательность

$$a_0 = 2^{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil}, a_1 = 2^{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil - 1}, \dots, a_{\lceil \log_2 p_{n,d} \rceil} = 1.$$

Глава 3

Оценки высоты и существенной высоты конечно порождённой PI-алгебры.

3.1 Оценка существенной высоты.

В данном разделе мы продолжаем доказывать основную теорему 1.8.1. Попутно доказывается теорема 1.8.4. Будем смотреть на позиции букв слова W как на ось времени, то есть подслово u встретилось раньше подслова v , если u целиком лежит левее v внутри слова W .

3.1.1 Нахождение различных периодических фрагментов в слове

Обозначим за s количество подслов слова W с периодом длины меньше n , в которых период повторяется больше $2n$ раз и которые попарно разделены сравнимыми с предыдущим периодом подсловами длины больше n . Пронумеруем их от начала к концу слова: $x_1^{2n}, x_2^{2n}, \dots, x_s^{2n}$. Таким образом $W = y_0 x_1^{2n} y_1 x_2^{2n} \dots x_s^{2n} y_s$.

Если найдётся i такое, что слово x_i длины не меньше n , то в слове x_i^{2n} найдутся n попарно сравнимых хвостов, а значит, слово x_i^{2n} — n -разбиваемое. Получаем, что число s не меньше, чем существенная высота слова W над множеством слов длины меньше n .

Определение 3.1.1. Слово u назовем *нециклическим*, если u нельзя представить в виде v^k , где $k > 1$.

Определение 3.1.2. *Слово-цикл* u — слово u со всеми его сдвигами по циклу.

Определение 3.1.3. *Циклическое слово* u — цикл из букв слова u , где после его последней буквы идёт первая.

Определение 3.1.4. Если любые два циклических сдвига слов u и v сравнимы, то назовём слова u и v *сильно сравнимыми*. Аналогично определяется сильная сравнимость слово-циклов и циклических слов.

Далее мы будем пользоваться естественной биекцией между слово-циклами и циклическими словами.

Определение 3.1.5. Слово W называется *сильно n -разбиваемым*, если его можно представить в виде $W = W_0 W_1 \cdots W_n$, где подслова W_1, \dots, W_n идут в порядке лексикографического убывания, и каждое из слов $W_i, i = 1, 2, \dots, n$ начинается с некоторого слова $z_i^k \in Z$, все z_i различны.

Лемма 3.1.1. Если найдётся число $m, 1 \leq m < n$, такое, что существуют $(2n - 1)$ попарно несравнимых слов длины $m : x_{i_1}, \dots, x_{i_{2n-1}}$, то W — n -разбиваемое.

Доказательство. Положим $x := x_{i_1}$. Тогда в слове W найдутся непересекающиеся под-слова $x^{p_1} v'_1, \dots, x^{p_{2n-1}} v'_{2n-1}$, где p_1, \dots, p_{2n-1} — некоторые натуральные числа, большие n , а v'_1, \dots, v'_{2n-1} — некоторые слова длины m , сравнимые с $x, v'_1 = v_{i_1}$. Тогда среди слов v'_1, \dots, v'_{2n-1} найдутся либо n лексикографически больших x , либо n лексикографически меньших x . Можно считать, что v'_1, \dots, v'_n — лексикографически больше x . Тогда в слове W найдутся подслова $v'_1, x v'_2, \dots, x^{n-1} v'_n$, идущие слева направо в порядке лексикографического убывания. \square

Рассмотрим некоторое число $m, 1 \leq m < n$. Разобьём все x_i длины m на эквивалентности по сильной несравнимости и выберем по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Пусть это слова x_{i_1}, \dots, x_{i_s} , где s' — некоторое натуральное число. Так как подслова x_i являются периодами, будем рассматривать их как слово-циклы.

Обозначение 3.1.1. $v_k := x_{i_k}$

Пусть $v(k, i)$, где i — натуральное число от 1 до m , — циклический сдвиг слова v_k на $(k - 1)$ позиций вправо, то есть $v(k, 1) = v_k$, а первая буква слова $v(k, 2)$ является второй буквой слова v_k . Таким образом, $\{v(k, i)\}_{i=1}^m$ — слово-цикл слова v_k . Заметим, что для любых $1 \leq i_1, i_2 \leq p, 1 \leq j_1, j_2 \leq m$ слово $v(i_1, j_1)$ сильно несравнимо со словом $v(i_2, j_2)$.

Замечание 3.1.1. Случаи $m = 2, 3, n - 1$ более подробно рассмотрены в работах [51, 37].

3.1.2 Применение теоремы Дилуорса

Рассмотрим множество $\Omega' = \{v(i, j)\}$, где $1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq m$. Введём следующий порядок на словах $v(i, j)$:

- $v(i_1, j_1) \succ v(i_2, j_2)$, если
- 1) $v(i_1, j_1) > v(i_2, j_2)$
- 2) $i_1 > i_2$

Лемма 3.1.2. Если во множестве Ω' для порядка \succ найдётся антицепь длины n , то слово W будет n -разбиваемым.

Доказательство. Пусть нашлась антицепь длины n из слов $v(i_1, j_1), v(i_2, j_2), \dots, v(i_n, j_n)$; где $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$. Если все неравенства между i_k — строгие, то слово W — n -разбиваемое по определению.

Предположим, что для некоторого числа r нашлись $i_{r+1} = \dots = i_{r+k}$, где либо $r = 0$, либо $i_r < i_{r+1}$. Кроме того, k — такое натуральное число, что либо $k = n - r$, либо $i_{r+k} < i_{r+k+1}$.

Слово $s_{i_{r+1}}$ — периодическое, следовательно, оно представляется в виде произведения n экземпляров слова $v_{i_{r+1}}^2$. Слово $v_{i_{r+1}}^2$ содержит слово-цикл $v_{i_{r+1}}$. Значит, в слове $s_{i_{r+1}}$ можно выбрать непересекающиеся подслова, идущие в порядке лексикографического убывания, равные $v(i_{r+1}, j_{r+1}), \dots, v(i_{r+k}, j_{r+k})$ соответственно. Таким же образом поступаем со всеми множествами равных индексов в последовательности $\{i_r\}_{r=1}^n$. Получаем n -разбиваемость слова W . Противоречие. \square

Значит, множество Ω' можно разбить на $(n - 1)$ цепь.

Обозначение 3.1.2. Положим $q_n = (n - 1)$.

3.1.3 Наборы $C^\alpha(i)$, процесс на позициях

Покрасим первые буквы слов из Ω' в q_n цветов в соответствии с принадлежностью к цепям. Покрасим также числа от 1 до $|\Omega'|$ в соответствующие цвета. Фиксируем натуральное число $\alpha \leq t$. Каждому числу i от 1 до $|\Omega'|$ сопоставим упорядоченный набор слов $C^\alpha(i)$, состоящий из q_n слов по следующему правилу:

Для каждого $j = 1, 2, \dots, q_n$ положим

$f(i, j) = \{\max f \leq i : \text{существует } k \text{ такое, что } v(f, k) \text{ раскрашено в цвет } j \text{ и } \alpha\text{-хвост, который начинается с } f, \text{ состоит только из букв, являющихся первыми буквами хвостов из } \Omega'\}.$

Если такого f не найдётся, то слово из $C^\alpha(i)$ считаем равным θ , в противном случае это слово считаем равным α -хвосту слова $v(f, k)$.

Обозначение 3.1.3. Положим $\varphi(a)$ равным наибольшему k такому, что найдётся число i , для которого верно равенство $C^\alpha(i) = C^\alpha(i + k - 1)$.

Для заданного $a \leq t$ определим разбиение последовательности слово-циклов $\{i\}$ слова W на классы эквивалентности следующим образом: $i \text{ AC}_a j$, если $C^\alpha(i) = C^\alpha(j)$.

Заметим, что построенная конструкция во многом аналогична построенной в доказательстве теоремы 1.8.2. Можно обратить внимание на схожесть $B^a(i)$ и $C^\alpha(i)$, а также $\psi(a)$ и $\varphi(a)$.

Лемма 3.1.3. $\varphi(m) \leq q_n/m$.

Доказательство. Напомним, что слово-циклы были пронумерованы. Рассмотрим слово-циклы с номерами $i, i + 1, \dots, i + [q_n/m]$. Ранее было показано, что каждый слово-цикл состоит из t различных слов. Рассмотрим теперь слова в слово-циклах $i, i + 1, \dots, i + [q_n/m]$ как элементы множества Ω' . При таком рассмотрении у первых букв из слово-циклов появляются свои позиции. Всего рассматриваемых позиций не меньше n . Следовательно, среди них найдутся две позиции одного цвета. Тогда в силу сильной несравнимости слово-циклов имеем утверждение леммы. \square

Предложение 3.1.1. Для любых натуральных $a < b$ имеем $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

Лемма 3.1.4 (Основная). Для натуральных чисел a, k таких, что $ak \leq m$, верно неравенство

$$\varphi(a) \leq p_{n,d}^k \varphi(k \cdot a).$$

Доказательство. Рассмотрим по наименьшему представителю из каждого класса $AS_{k \cdot a}$. Получена последовательность позиций $\{i_j\}$. Теперь рассмотрим все i_j и $C^{k \cdot a}(i_j)$ из одного класса эквивалентности по AS_a . Пусть он состоит из $C^{k \cdot a}(i_j)$ при $i_j \in [b, c]$. Обозначим за $\{i_j\}'$ отрезок последовательности $\{i_j\}$, для которого $i_j \in [b, c]$.

Фиксируем некоторое натуральное число $r, 1 \leq r \leq q_n$. Назовём все $k \cdot a$ -начала цвета r , начинающиеся с позиций слова W из $\{i_j\}'$, представителями типа r . Все представители типа r будут попарно различны, так как они начинаются с наименьших позиций в классах эквивалентности по $AS_{k \cdot a}$. Разобьём каждый представитель типа r на k сегментов длины a . Пронумеруем сегменты внутри каждого представителя типа r слева направо числами от нуля до $(k - 1)$. Если найдутся $(q_n + 1)$ представителей типа r , у которых совпадают первые $(t - 1)$ сегментов, но которые попарно различны в t -ом, где t — натуральное число, $1 \leq t \leq k - 1$, то найдутся две первых буквы t -го сегмента одного цвета. Тогда позиции, с которых начинаются эти сегменты, входят в разные классы эквивалентности по AS_a .

Применим лемму 2.2.1 следующим образом: во всех представителях типа r , кроме самого правого, будем считать сегменты *единичными*, если именно в них находится наименьшая позиция, в которой текущий представитель типа r отличается от предыдущего. Остальные сегменты будем считать *нулевыми*.

Теперь мы можем применить лемму о процессе с параметрами, совпадающими с заданными в условии леммы. Получаем, что в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более q_n^{k-1} представителей типа r . Тогда в последовательности $\{i_j\}'$ будет не более q_n^k членов. Таким образом, $c - b \leq q_n^k \varphi(k \cdot a)$. \square

3.1.4 Завершение доказательства субэкспоненциальности существенной высоты

Пусть

$$a_0 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil}, a_1 = 3^{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil - 1}, \dots, a_{\lceil \log_3 p_{n,d} \rceil} = 1.$$

Подставляя эти a_i в леммы 3.1.4 и 3.1.3, получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi(1) &\leq q_n^3 \varphi(3) \leq q_n^9 \varphi(9) \leq \dots \leq q_n^{3^{\lceil \log_3 m \rceil}} \varphi(m) \leq \\ &\leq q_n^{3^{\lceil \log_3 m \rceil + 1}}. \end{aligned}$$

Так как C_i^1 принимает не более $1 + q_n l$ различных значений, то

$$|\Omega'| < q_n^{3^{\lceil \log_3 m \rceil + 1}} (1 + q_n l) < n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 2} l}.$$

По лемме 3.1.1 получаем, что количество x_i длины m меньше $2n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 3} l}$.

Имеем, что количество всех x_i меньше $2n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 4} l}$.

То есть $s < 2n^{3^{\lceil \log_3 n \rceil + 4} l}$. Таким образом, **теорема 1.8.4 доказана.**

3.2 Оценка высоты в смысле Ширшова

3.2.1 План доказательства

Будем снова под *n-разбиваемым словом* подразумевать *n-разбиваемое* в обычном смысле. Сначала мы находим необходимое количество фрагментов с длиной периода не меньше $2n$ в слове W . Это можно сделать, просто разбив слово W на подслова большой длины, к которым применяется теорема 1.8.2. Однако мы можем улучшить оценку, если сначала выделим в слове W периодический фрагмент с длиной периода не менее $4n$, затем рассмотрим W_1 — слово W с “вырезанным” периодическим фрагментом u_1 . У слова W_1 выделяем фрагмент с длиной периода не менее $4n$, после чего рассматриваем W_2 — слово W_1 с “вырезанным” периодическим фрагментом u_2 . У слова W_2 так же вырезаем периодический фрагмент. Далее продолжаем этот процесс, подробнее описанный в алгоритме 3.2.1. Затем по вырезанным фрагментам мы восстанавливаем первоначальное слово W . После этого показывается, что в слове W подслово u_i чаще всего не является произведением большого количества не склеенных подслов. В лемме 3.2.1 доказывается, что применение алгоритма 3.2.1 дает необходимое количество подслов слова W с длиной периода не меньше $2n$ среди вырезанных подслов.

3.2.2 Суммирование существенной высоты и степени нильпотентности

До конца главы будем использовать следующее

Обозначение 3.2.1. $\text{Ht}(w)$ — высота слова w над множеством слов степени не выше n .

Рассмотрим слово W с высотой $\text{Ht}(W) > \Phi(n, l)$. Теперь для него проведём следующий алгоритм:

Алгоритм 3.2.1.

Первый шаг. По теореме 1.8.2 в слове W найдётся подслово с длиной периода $4n$.

Пусть $W_0 = W = u'_1 x_1^{4n} y'_1$, причём слово x_1 — нециклическое. Представим y'_1 в виде $y'_1 = x_1^{r_2} y_1$, где r_2 — максимально возможное число. Слово u'_1 представим как $u'_1 = u_1 x_1^{r_1}$, где r_1 — наибольшее возможное. Обозначим за f_1 следующее слово:

$$W_0 = u_1 x_1^{4n+r_1+r_2} y_1 = u_1 f_1 y_1.$$

Назовём позиции, входящие в слово f_1 , скучными, последнюю позицию слова u_1 — скучной типа 1, вторую с конца позицию u_1 — скучной типа 2 и так далее, n -ую с конца позицию u_1 — скучной типа n . Положим $W_1 = u_1 y_1$.

k -ый шаг. Рассмотрим слова u_{k-1} , y_{k-1} , $W_{k-1} = u_{k-1} y_{k-1}$, построенные на предыдущем шаге. Если $|W_{k-1}| \geq \Phi(n, l)$, то применим теорему 1.8.2 к слову W с тем условием, что процесс в основной лемме 2.2.2 будет вестись только по не скучным позициям и скучным позициям типа больше ka , где k и a — параметры леммы 2.2.2.

Таким образом, в слове W_{k-1} найдётся нециклическое подслово с длиной периода $4n$, так что

$$W_{k-1} = u'_k x_{k'}^{4n} y'_k.$$

При этом положим

$$r_1 := \sup\{r : u'_k = u_k x_{k'}^r\}, \quad r_2 := \sup\{r : y'_k = x_{k'}^r y_k\}.$$

(Отметим, что слова в наших рассуждениях могут быть пустыми.) Определим f_k из равенства:

$$W_{k-1} = u_k x_{k'}^{4n+r_1+r_2} y_k = u_k f_k y_k.$$

Назовём позиции, входящие в слово f_k , скучными, последнюю позицию слова u_k — скучной типа 1, вторую с конца позицию u_k — скучной типа 2 и так далее, n -ую с конца позицию u_k — скучной типа n . Если позиция в процессе алгоритма определяется как скучная двух типов, то будем считать её скучной того типа, который меньше. Положим $W_k = u_k y_k$.

Обозначение 3.2.2. Проведём $4t+1$ шагов алгоритма 3.2.1. Рассмотрим первоначальное слово W . Для каждого натурального i из отрезка $[1, 4t]$ имеет место равенство

$$W = w_0 f_i^{(1)} w_1 f_i^{(2)} \dots f_i^{(n_i)} w_{n_i}$$

для некоторых подслов w_j . Здесь $f_i = f_i^{(1)} \dots f_i^{(n_i)}$. Также мы считаем, что при $1 \leq j \leq n_i - 1$ подслово w_j — непустое. Пусть $s(k)$ — количество индексов $i \in [1, 4t]$ таких, что $n_i = k$.

Для доказательства теоремы 1.8.2 требуется найти как можно больше длинных периодических фрагментов. Помочь в этом сможет следующая лемма:

Лемма 3.2.1. $s = s(1) + s(2) \geq 2t$.

Доказательство. Назовём монолитным подслово U слова W , если

1. U является произведением слов вида $f_i^{(j)}$,
2. U не является подсловом слова, для которого выполняется предыдущее свойство (1).

Пусть после $(i-1)$ -го шага алгоритма 3.2.1 в слове W содержится k_{i-1} монолитных подслов. Заметим, что $k_i \leq k_{i-1} - n_i + 2$.

Тогда если $n_i \geq 3$, то $k_i \leq k_{i-1} - 1$. Если же $n_i \leq 2$, то $k_i \leq k_{i-1} + 1$. При этом $k_1 = 1$, $k_t \geq 1 = k_1$. Лемма доказана. \square

Следствие 3.2.1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leq 10t \leq 5s. \quad (3.2.1)$$

Доказательство. Из доказательства леммы 3.2.1 получаем, что $\sum_{n_i \geq 3} (n_i - 2) \leq 2t$.

По определению $\sum_{k=1}^{\infty} s(k) = 4t$, т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} 2s(k) = 8t$.

Складывая эти два неравенства и применяя лемму 3.2.1, получаем доказываемое неравенство 3.2.1. \square

Предложение 3.2.1. *Высота слова W будет не больше*

$$\Psi(n, 4n, l) + \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot s(k) \leq \Psi(n, 4n, l) + 5s.$$

Далее будем рассматривать только f_i с $n_i \leq 2$.

Обозначение 3.2.3. *Если $n_i = 1$, то положим $f'_i := f_i$.*

Если $n_i = 2$, то положим $f'_i := f_i^{(j)}$, где $f_i^{(j)}$ — слово с наибольшей длиной между $f_i^{(1)}$ и $f_i^{(2)}$.

Слова f'_i упорядочим в соответствии с их близостью к началу W . Получим последовательность $f'_{m_1}, \dots, f'_{m_s}$, где $s' = s(1) + s(2)$, положим $f''_i := f'_{m_i}$. Пусть $f''_i = w'_i x_i^{p_i''} w''_i$, где хотя бы одно из слов w'_i, w''_i — пустое.

Замечание 3.2.1. *Можно считать, что мы первыми шагами алгоритма 3.2.1 выбрали все те f_i , для которых $n_i = 1$.*

Теперь рассмотрим z'_j — подслова W следующего вида:

$$z'_j = x_{(2j-1)''}^{p_{(2j-1)''} + 1} v_j, \mathfrak{J} \geq 0, |v_j| = |x_{(2j-1)''}|,$$

при этом v_j не равно $x_{(2j-1)''}$, начало подслова z'_j совпадает с началом периодического подслова в f''_{2j-1} . Покажем, что z'_j не пересекаются как подслова слова W .

В самом деле. Если $f''_{2j-1} = f_{m_{2j-1}}$, то $z'_j = f_{m_{2j-1}} v_j$.

Если же $f''_{2j-1} = f_{m_{2j-1}}^{(k)}$, $k = 1, 2$, а подслово z'_j пересекается с подсловом z'_{j+1} , то $f''_{2j} \subset z'_j$. Так как слова $x_{(2j)''}$ и $x_{(2j-1)''}$ — нециклические, то $|x_{(2j)''}| = |x_{(2j-1)''}|$. Но тогда длина периода в z'_j не меньше $4n$, что противоречит замечанию 3.2.1.

Тем самым доказана следующая лемма:

Лемма 3.2.2. *В слове W с высотой не более $(\Psi(n, 4n, l) + 5s')$ найдётся не менее s' непересекающихся периодических подслов, в которых период повторится не менее $2n$ раз. Кроме того, между любыми двумя элементами данного множества периодических подслов найдётся подслово длины периода более левого из выбранных элементов.*

3.2.3 Завершение доказательства субэкспоненциальности высоты

Подставляя в лемму 3.2.2 вместо числа s' значение s из доказательства теоремы 1.8.4 получаем, что высота W не больше, чем

$$\Psi(n, 4n, l) + 5s < E_1 l \cdot n^{E_2 + 12 \log_3 n},$$

где $E_1 = 4^{21 \log_3 4 + 17}$, $E_2 = 30 \log_3 4 + 10$.

Тем самым мы получили **утверждение основной теоремы 1.8.1.**

Глава 4

Оценки кусочной периодичности

4.1 План улучшения оценок существенной высоты

Далее приводятся оценки на количество периодических подслов с периодом длины $2, 3, (n - 1)$ произвольного не n -разбиваемого слова W . Рассмотрение случая периодов длины $2, 3$ при помощи кодировки обобщается до доказательства ограниченности существенной высоты. Кроме того, получена нижняя оценка на число подслов с периодом 2 , и эта оценка при достаточно большом l отличается от верхней в 4 раза.

С целью дальнейшего улучшения оценок, полученных в главе 3, вводятся следующие определения:

Определение 4.1.1. а) Число h называется *малой выборочной высотой* с границей k слова W над множеством слов Z , если h — такое максимальное число, что у слова W найдётся h попарно непересекающихся циклически несравнимых подслов вида z^m , где $z \in Z, m > k$.

б) Число h называется *большой выборочной высотой* с границей k слова W над множеством слов Z , если h — такое максимальное число, что у слова W найдётся h попарно непересекающихся подслов вида z^m , где $z \in Z, m > k$, причём соседние подслова из этой выборки несравнимы.

Здесь и далее: $k = 2n$.

в) Множество слов V имеет малую (большую) выборочную высоту h над некоторым множеством слов Z , если h является точной верхней гранью малых (больших) выборочных высот над Z его элементов.

Затем доказываются следующие нижние и верхние оценки на кусочную периодичность:

Теорема 4.1.1. *Малая выборочная высота множества не сильно n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 2 не больше $\beth(2, l, n)$, где*

$$\beth(2, l, n) = \frac{(2l - 1)(n - 1)(n - 2)}{2}.$$

Теорема 4.1.2. *Малая выборочная высота множества не сильно n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 2 при*

фиксированном n больше, чем $\alpha(n, l)$, где

$$\alpha(n, l) = \frac{n^2 l}{2}(1 - o(l)).$$

Более точно, $\alpha(n, l) = (l - 2^{n-1})(n - 2)(n - 3)/2$.

Теорема 4.1.3. *Малая выборочная высота множества не сильно n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины 3 не больше $\beth(3, l, n)$, где*

$$\beth(3, l, n) = (2l - 1)(n - 1)(n - 2).$$

Доказательства теорем 4.1.2, 4.1.1, 4.1.3 изложены в работе [51].

Теорема 4.1.4. *Малая выборочная высота множества не сильно n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины $(n - 1)$ не больше $\beth(n - 1, l, n)$, где*

$$\beth(n - 1, l, n) = (l - 2)(n - 1).$$

Теорема 4.1.5 с помощью кодировки обобщает теорему 4.1.1 до доказательства ограниченности существенной высоты множества не n -разбиваемых слов.

Теорема 4.1.5. *Существенная высота l -порождённой PI-алгебры с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством слов длины $< n$ меньше, чем $\Upsilon(n, l)$, где*

$$\Upsilon(n, l) = 8(l + 1)^n n^5 (n - 1).$$

Доказательства теорем 4.1.4, 4.1.5 изложены в работе [37].

Малую и большую выборочные высоты связывает следующая теорема:

Теорема 4.1.6. *Большая выборочная высота l -порождённой PI-алгебры A с допустимым полиномиальным тождеством степени n над множеством нециклических слов длины k меньше $2(n - 1)\beth(k, l, n)$, где $\beth(k, l, n)$ — малая выборочная высота A над множеством нециклических слов длины k .*

Как и ранее будем считать, что слова строятся над алфавитом \mathfrak{A} из букв $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$, над которыми введён лексикографический порядок, причём $a_i < a_j$, если $i < j$. Для следующих ниже доказательств будем отождествлять буквы a_i с их индексами i (то есть будем писать не слово $a_i a_j$, а слово ij).

4.2 Доказательство верхних оценок выборочной высоты

4.2.1 Периоды длины два

Пусть слово W не сильно n -разбиваемо. Рассмотрим некоторое множество Ω'' попарно непересекающихся циклических сравнимых подслов W вида z^m , где $m > 2n$, z — нециклическое двухбуквенное слово. Будем называть элементы этого множества *представителями*, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов

эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось t таких представителей. Прономеруем их всех в порядке положения в слове W (первое — самое левое) числами от 1 до t . В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно два различных двухбуквенных слова.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

- u лексикографически меньше v ,
- представитель, содержащий u левее представителя, содержащего v .

Из не сильной n -разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $(n - 1)$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых двухбуквенных слов на $(n - 1)$ цепь. Раскрасим слова в $(n - 1)$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям.

Введём соответствие между следующими четырьмя объектами:

- натуральными числами от 1 до t ,
- классами эквивалентности по сильной сравнимости,
- содержащимися в классах эквивалентности по сильной сравнимости циклическими словами длины 2,
- парами цветов, в которые раскрашены сдвиги по циклу этого слово-цикла.

Буквы слово-цикла раскрасим в цвета, в которые раскрашены сдвиги по циклу, начинающиеся с этих цветов.

Рассмотрим граф Γ с вершинами вида (k, i) , где $0 < k < n$ и $0 < i \leq l$. Первая координата соответствует цвету, а вторая — букве. Две вершины $(k_1, i_1), (k_2, i_2)$ соединяются *ребром с весом j* , если

- в j -ом представителе содержится слово-цикл из букв i_1, i_2 ,
- буквы j -го представителя раскрашены в цвета k_1, k_2 соответственно.

Посчитаем число рёбер между вершинами вида (k_1, i_1) и вершинами вида (k_2, i_2) , где k_1, k_2 — фиксированы, i_1, i_2 — произвольны. Рассмотрим два ребра l_1 и l_2 из рассматриваемого множества с весами $j_1 < j_2$ с концами в некоторых вершинах $A = (k_1, i_{11}), B = (k_2, i_{21})$ и $C = (k_1, i_{12}), D = (k_2, i_{22})$ соответственно. Тогда по построению одновременно выполняются неравенства $i_{11} \leq i_{12}, i_{21} \leq i_{22}$. При этом, так как рассматриваются представители классов эквивалентности по сильной сравнимости, одно из неравенств строгое. Значит, $i_{11} + i_{21} < i_{12} + i_{22}$. Так как вторые координаты вершин ограничены числом l , то вычисляемое число рёбер будет не более $(2l - 1)$.

Так как первая координата вершин меньше n , то всего рёбер в графе будет не более $(2l - 1)(n - 1)(n - 2)/2$. Таким образом, теорема 4.1.1 доказана.

4.2.2 Периоды длины три

Пусть слово W не сильно n -разбиваемо. Рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся циклических несравнимых подслов слова W вида z^m , где $m > 2n$, z — нециклическое трёхбуквенное слово. Будем называть элементы этого множества представителями, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов

эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось t таких представителей. Прономеруем их всех в порядке положения в слове W (первое — ближе всех к началу слова) числами от 1 до t . В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно три различных трёхбуквенных слова.

Введём порядок на этих словах следующим образом:

$u \prec v$, если

- u лексикографически меньше v ,
- представитель, содержащий u , левее представителя, содержащего v .

Из не сильной n -разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $n - 1$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых трёхбуквенных слов на $(n - 1)$ цепь. Раскрасим слова в $(n - 1)$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям.

Можно заметить, что до этого момента доказательство теоремы 4.1.3 практически полностью повторяет доказательство теоремы 4.1.1. Однако для дальнейшего доказательства необходимо использовать ориентированный аналог графа Γ , который вводится далее.

Рассмотрим теперь уже ориентированный граф G с вершинами вида (k, i) , где $0 < k < n$ и $0 < i \leq l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву. Ребро с некоторым весом j выходит из (k_1, i_1) в (k_2, i_2) , если для некоторых i_3, k_3

- в j -ом представителе содержится слово-цикл $i_1 i_2 i_3$,
- буквы i_1, i_2, i_3 j -го представителя раскрашены в цвета k_1, k_2, k_3 соответственно.

Таким образом, граф G состоит из ориентированных треугольников с рёбрами одинакового веса. Однако в отличие от графа Γ из доказательства теоремы 4.1.1, могут появляться кратные рёбра, то есть рёбра с общими началом и концом, но разным весом. Для дальнейшего доказательства нам потребуется следующая

Лемма 4.2.1 (Основная). *Пусть A, B и C — вершины графа G , $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ — ориентированный треугольник с рёбрами некоторого веса j , кроме того, существуют другие рёбра $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A$ с весами a, b, c соответственно. Тогда среди a, b, c есть число, большее j .*

Доказательство. От противного. Если два числа из набора a, b, c равны друг другу, то $a = b = c = j$, так как в противном случае есть 2 треугольника $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$, в каждом из которых веса всех трёх рёбер совпадают между собой. Тогда в Ω'' есть два не сильно сравнимых слова, что противоречит определению Ω'' . Без ограничения общности, что a наибольшее из чисел a, b . Рассмотрим треугольник из рёбер веса a . Этот треугольник будет иметь общую с $\triangle ABC$ сторону AB и некоторую третью вершину C' . Если вторая координата вершины C' совпадает со второй координатой вершины C (то есть совпали соответствующие C и C' буквы алфавита), то $\triangle ABC$ и $\triangle ABC'$ соответствуют не сильно сравнимым словам из множества Ω'' . Снова получено противоречие с определением множества Ω'' . По предположению $a < j$, а значит, из монотонности цвета k_A (первой координаты вершины A) слово $i_A i_B i_{C'}$, составленное из вторых координат вершин A, B, C' соответственно, лексикографически меньше слова $i_A i_B i_C$. Значит, $i_{C'} < i_C$. Тогда слово $i_B i_{C'}$ лексикографически меньше слова $i_B i_C$. Из монотонности цвета k_B получаем, что $b > a$. Противоречие. \square

4.2.3 Завершение доказательства теоремы 4.1.3

Рассмотрим теперь граф G_1 , полученный из графа G заменой между каждыми двумя вершинами кратных рёбер на ребро с наименьшим весом. Тогда по лемме 4.2.1 в графе G_1 встретятся рёбра всех весов от 1 до t .

Посчитаем число рёбер из вершин вида (k_1, i_1) в вершины вида (k_2, i_2) , где k_1, k_2 фиксированы, i_1, i_2 произвольны. Рассмотрим два ребра из рассматриваемого множества с весами $j_1 < j_2$ с концами в некоторых вершинах $(k_1, i_{1_1}), (k_2, i_{2_1})$ и $(k_1, i_{1_2}), (k_2, i_{2_2})$ соответственно. Тогда по построению $i_{1_1} \leq i_{1_2}, i_{2_1} \leq i_{2_2}$, причём, так как рассматриваются представители классов эквивалентности по сильной сравнимости, одно из неравенств строгое. Так как вторые координаты вершин ограничены числом l , то вычисляемое число рёбер будет не более $2l - 1$.

Так как первая координата вершин меньше n , то всего рёбер в графе будет не более $(2l - 1)(n - 1)(n - 2)$. Таким образом, теорема 4.1.3 доказана.

4.2.4 Периоды длины, близкой к степени тождества в алгебре

Пусть слово W не n -разбиваемо. Как и прежде, рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся несравнимых подслов слова W вида z^m , где $m > 2n$, z — $(n - 1)$ -буквенное нециклическое слово. Будем называть элементы этого множества *представителями*, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось t таких представителей. Пронумеруем их всех в порядке положения в слове W (первое — ближе всех к началу слова) числами от 1 до t . В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно $(n - 1)$ различных $(n - 1)$ -буквенных слов.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

- u лексикографически меньше v ;
- представитель, содержащий u левее представителя, содержащего v .

Из не сильной n -разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно $n - 1$. По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых $(n - 1)$ -буквенных слов на $(n - 1)$ цепь. Раскрасим слова в $(n - 1)$ цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям. Раскрасим позиции, с которых начинаются слова, в те же цвета, что и соответствующие слова.

Рассмотрим ориентированный граф G с вершинами вида (k, i) , где $0 < k < n$ и $0 < i \leq l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву.

Ребро с некоторым весом j выходит из (k_1, i_1) в (k_2, i_2) , если

- для некоторых i_3, i_4, \dots, i_{n-1} в j -ом представителе содержится слово-цикл $i_1 i_2 \dots i_{n-1}$;
- позиции, на которых стоят буквы i_1, i_2 раскрашены в цвета k_1, k_2 соответственно.

Таким образом, граф G состоит из ориентированных циклов длины $(n - 1)$ с рёбрами одинакового веса. Теперь нам требуется найти показатель, который бы строго монотонно рос с появлением каждого нового представителя при движении от начала к концу слова W . В теореме 4.1.3 таким показателем было число несократимых рёбер графа G . В доказательстве теоремы 4.1.4 будет рассматриваться сумма вторых координат неизолированных вершин графа G . Нам потребуется следующая

Лемма 4.2.2 (Основная). Пусть A_1, A_2, \dots, A_{n-1} — вершины графа G , $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_{n-1} \rightarrow A_1$ — ориентированный цикл длины $(n-1)$ с рёбрами некоторого веса j . Тогда не найдётся другого цикла между вершинами A_1, A_2, \dots, A_{n-1} одного веса.

Доказательство. От противного. Рассмотрим наименьшее число j , для которого нашёлся другой одноцветный цикл между вершинами цикла цвета j . В силу минимальности j можно считать, что этот цикл имеет цвет $k > j$. Пусть цикл цвета k имеет вид $A_{j_1}, A_{j_2}, \dots, A_{j_{n-1}}$, где $\{j_p\}_{p=1}^{n-1} = \{1, 2, \dots, n-1\}$. Пусть (k_j, i_j) — координата вершины A_j . Рассмотрим наименьшее число $q \in \mathbb{N}$ такое, что для некоторого r слово $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \dots i_{j_{r+q-1}}$ лексикографически больше слова $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \dots i_{j_{r+q-1}}$ (здесь и далее сложение нижних индексов происходит по модулю $(n-1)$). Такое q существует, так как слова $i_1 i_2 \dots i_{n-1}$ и $i_{j_1} i_{j_2} \dots i_{j_{n-1}}$ сильно сравнимы. Кроме того, в силу совпадения множеств $\{j_p\}_{p=1}^{n-1}$ и $\{1, 2, \dots, n-1\}$ получаем, что $q \geq 2$. Так как q — наименьшее, то для любого $s < q$, любого r имеем $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \dots i_{j_{r+s-1}} = i_{j_r} i_{j_{r+1}} \dots i_{j_{r+s-1}}$. Тогда для любого $s < q$, любого r имеем $i_{j_{r+s-1}} = i_{j_{r+s-1}}$. Из монотонности слов каждого цвета получаем, что для любого r $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \dots i_{j_{r+q-1}}$ не больше $i_{j_r} i_{j_{r+1}} \dots i_{j_{r+q-1}}$. Значит, для любого r верно неравенство $i_{j_{r+q-1}} \geq i_{j_{r+q-1}}$. По предположению найдётся такое r , что $i_{j_{r+q-1}} > i_{j_{r+q-1}}$. Так как обе последовательности $\{j_{r+q-1}\}_{r=1}^{n-1}$ и $\{j_r + q - 1\}_{r=1}^{n-1}$ пробегают элементы множества чисел $\{1, 2, \dots, n-1\}$ по одному разу, то $\sum_{r=1}^{n-1} j_{r+q-1} = \sum_{r=1}^{n-1} (j_r + q - 1)$ (при вычислении числа $j_r + q - 1$ суммирование также проходит по модулю $(n-1)$). Но мы получили $\sum_{r=1}^{n-1} j_{r+q-1} > \sum_{r=1}^{n-1} (j_r + q - 1)$. Противоречие. \square

4.2.5 Завершение доказательства теоремы 4.1.4

Для произвольного j рассмотрим циклы длины $(n-1)$ весов j и $j+1$ для некоторого j . Из основной леммы 4.2.2 найдутся числа k, i такие, что вершина (k, i) входит в цикл веса $(j+1)$, но не входит в цикл веса j . Пусть цикл веса j состоит из вершин вида $(k, i_{(j,k)})$, где $k = 1, 2, \dots, n-1$. Введём величину $\pi(j) = \sum_{k=1}^{n-1} i_{(j,k)}$. Тогда из основной леммы 4.2.2 и монотонности слов по цветам получаем, что $\pi(j+1) \geq \pi(j) + 1$. Так как рассматриваемые периоды не циклические, то найдётся k такое, что $i_{(1,k)} > 1$. Значит, $\pi(1) > n-1$. $\forall j : i_{(j,k)} \leq l-1$, а значит, $\pi(j) \leq (l-1)(n-1)$. Следовательно, $j \leq (l-2)(n-1)$. Значит, $t \leq (l-2)(n-1)$. Тем самым, теорема 4.1.4 доказана.

Представленная при доказательстве теоремы 4.1.4 техника позволяет доказать следующий факт:

Предложение 4.2.1. Малая выборочная высота множества не сильно n -разбиваемых слов над l -буквенным алфавитом относительно множества нециклических слов длины $(n-c)$ не больше $D(c)n^c l$, где $D(c)$ — некоторая функция, зависящая от c .

4.3 Нижняя оценка малой выборочной высоты над периодами длины два

Приведём пример. Из формулировки этой теоремы следует, что можно положить l сколь угодно большим. Будем считать, что $l > 2^{n-1}$. Мы воспользуемся конструкциями, принятыми в доказательстве теоремы 4.1.1. Таким образом, процесс построения примера сводится к построению рёбер в графе на l вершинах. Разобьём этот процесс на несколько больших шагов. Пусть i — натуральное число от 1 до $(l - 2^{n-1})$. Пусть на i -ом большом шаге в приведённом ниже порядке соединяются рёбрами следующие пары вершин:

$(i, 2^{n-2} + i),$
 $(i, 2^{n-2} + 2^{n-3} + i), (2^{n-2} + i, 2^{n-2} + 2^{n-3} + i),$
 $(i, 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + i), (2^{n-2} + i, 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + i),$
 $(2^{n-2} + 2^{n-3} + i, 2^{n-2} + 2^{n-3} + 2^{n-4} + i), \dots,$
 $(i, 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 + i), \dots, (2^{n-2} + \dots + 2 + i, 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 + i),$
где $i = 2, 3, \dots, l - 2^{n-1} + 1$.

При этом:

1. Никакое ребро не будет подсчитано 2 раза, так как вершина соединена рёбрами только с вершинами, значения в которых отличаются от значения в выбранной вершине на неповторяющуюся сумму степеней двойки.
2. Пусть *вершина типа* (k, i) — вершина, которая на i -ом шаге соединяется с k вершинами, значения в которых меньше значения её самой. Для всех i будут вершины типов $(0, i), (1, i) \dots, (n - 2, i)$.

Раскрасим в k -ый цвет слова, которые для некоторого i начинаются с буквы типа (k, i) и заканчиваются в буквах, с которыми вершина типа (k, i) соединяется рёбрами на i -ом большом шаге. Получена корректная раскраска в $(n - 1)$ цвет, а значит, слово сильно n -разбиваемо.

3. На i -ом большом шаге осуществляется $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ шагов. Значит,

$$q = (l - 2^{n-1})(n - 2)(n - 3)/2,$$

где q — количество рёбер в графе Γ .

Тем самым, теорема 4.1.2 доказана.

4.4 Оценка существенной высоты с помощью выборочной высоты

Из рассмотрения случая периодов длины 2 с помощью кодировки букв можно получить оценку на существенную высоту, которая будет расти полиномиально по числу образующих и экспоненциально по степени тождества. Для этого надо обобщить некоторые понятия, введённые ранее. Заметим, что механизм кодировки букв представляется перспективным для обобщения оценок на высоту, полученных при конкретном значении одного из параметров (в данном случае — ограничение длины слов в базисе Ширшова).

Конструкция 4.4.1. Рассмотрим алфавит \mathfrak{A} с буквами $\{a_1, a_2, \dots, a_l\}$. Введём на буквах лексикографический порядок: $a_i > a_j$, если $i > j$. Рассмотрим произвольное множество нециклических попарно сильно сравнимых слово-циклов некоторой одинаковой длины t . Пронумеруем элементы этого множества натуральными числами, начиная с 1. Введём порядок на словах, входящих в слово-цикл, следующим образом: $u \prec v$, если:

1. слово u — лексикографически меньше слова v ,
2. слово-цикл, содержащий слово u , имеет меньший номер, чем слово-цикл, содержащий слово v .

Пронумеруем теперь позиции букв в слово-циклах числами от 1 до t от начала к концу некоторого слова, входящего в слово-цикл.

Обозначение 4.4.1. 1. Пусть $w(i, j)$ — слово длины t , которое начинается с j -ой буквы в i -ом слово-цикле.

2. Пусть класс $X(t, l)$ — рассматриваемое множество слово-циклов с введённым на его словах порядком \prec .

Определение 4.4.1. Назовём те классы X , в которых не найдётся антицепи длины n , — n -светлыми. Соответственно, те, в которых найдётся такая антицепь — n -тёмными.

Из теоремы Дилуорса получаем, что слова в n -светлых классах X можно раскрасить в $(n - 1)$ цвет, так что одноцветные слова образуют цепь. Далее требуется оценить число элементов в n -светлых классах X .

Определение 4.4.2. Пусть $\beth(t, l, n)$ — наибольшее возможное число элементов в n -светлом классе $X(t, l)$.

Замечание 4.4.1. Здесь и далее первый аргумент в функции $\beth(\cdot, \cdot, \cdot)$ меньше третьего.

Следующая лемма позволяет оценить $\beth(t, l, n)$ через случаи малых периодов.

Лемма 4.4.1. $\beth(t, l^2, n) \geq \beth(2t, l, n)$

Доказательство. Рассмотрим n -светлый класс $X(2t, l)$. Разобьём во всех его слово-циклах позиции на пары соседних так, чтобы каждая позиция попала ровно в одну пару. Затем рассмотрим алфавит \mathfrak{B} с буквами $\{b_{i,j}\}_{i,j=1}^l$, причём $b_{i_1,j_1} > b_{i_2,j_2}$, если $i_1 \cdot l + j_1 > i_2 \cdot l + j_2$. Алфавит \mathfrak{B} состоит из l^2 букв. Каждая пара позиций из разбиения состоит из некоторых букв a_i, a_j . Заменяем пару букв a_i, a_j буквой $b_{i,j}$. Поступая так с каждой парой, получаем новый класс $X(t, l^2)$. Он будет n -светлым, так как если в классе $X(t, l^2)$ есть антицепь длины n из слов $w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \dots, w(i_n, j_n)$, то следует рассматривать прообразы слов $w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \dots, w(i_n, j_n)$ в первоначально взятом классе $X(2t, l)$. Пусть эти прообразы — слова $w(i_1, j'_1), w(i_2, j'_2), \dots, w(i_n, j'_n)$. Тогда слова $w(i_1, j'_1), w(i_2, j'_2), \dots, w(i_n, j'_n)$ образуют в классе $X(2t, l)$ антицепь длины n . Получено противоречие с тем, что класс $X(2t, l)$ — n -светлый. Тем самым, лемма доказана. \square

Теперь оценим $\beth(t, l, n)$ через случаи малых алфавитов.

Лемма 4.4.2. $\beth(t, l^2, n) \leq \beth(2t, l, 2n - 1)$

Доказательство. Рассмотрим $(2n - 1)$ -тёмный класс $X(2t, l)$. Можно считать, что n слов из антицепи, а именно $w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \dots, w(i_n, j_n)$, начинаются с нечётных позиций слово-циклов. Разобьём во всех его слово-циклах позиции на пары соседних так, чтобы каждая позиция попала ровно в одну пару и первая позиция в каждой паре была нечётной. Затем рассмотрим алфавит \mathfrak{B} с буквами $\{b_{i,j}\}_{i,j=1}^l$, причём $b_{i_1,j_1} > b_{i_2,j_2}$, если $i_1 \cdot l + j_1 > i_2 \cdot l + j_2$. Алфавит \mathfrak{B} состоит из l^2 букв. Каждая пара позиций из разбиения состоит из некоторых букв a_i, a_j . Заменяем пару букв a_i, a_j буквой $b_{i,j}$. Поступая так с каждой парой, получаем новый класс $X(t, l^2)$. Пусть слова $w(i_1, j_1), w(i_2, j_2), \dots, w(i_n, j_n)$ перешли в слова $w(i_1, j'_1), w(i_2, j'_2), \dots, w(i_n, j'_n)$. Эти слова будут образовывать антицепь длины n в классе $X(t, l^2)$. Таким образом, получен n -тёмный класс $X(t, l^2)$ с тем же числом элементов, что и $(2n - 1)$ -тёмный класс $X(2t, l)$. Тем самым, лемма доказана. \square

Для дальнейшего рассуждения необходимо связать $\beth(t, l, n)$ для произвольного первого аргумента и для первого аргумента, равного степени двойки.

Лемма 4.4.3. $\beth(t, l, n) \leq \beth(2^s, l + 1, 2^s(n - 1) + 1)$, где $s = \lceil \log_2(t) \rceil$.

Доказательство. Рассмотрим n -светлый класс $X(t, l)$. Введём в алфавит \mathfrak{A} новую букву a_0 , которая лексикографически меньше любой другой буквы из алфавита \mathfrak{A} . Получен алфавит \mathfrak{A}' . В каждый слово-цикл из класса $X(t, l)$ добавим $(t + 1)$ -ю, $(t + 2)$ -ю, \dots , 2^s -ю позиции, на которые поставим буквы a_0 . Получили класс $X(2^s, l + 1)$. Он будет $(2^s(n - 1) + 1)$ -светлым, так как в противном случае в этом классе для некоторого j найдутся слова $w(i_1, j), w(i_2, j), \dots, w(i_n, j)$, которые образуют антицепь в классе $X(2^s, l + 1)$. Тогда:

1. Если $j > t$, то слова $w(i_1, 1), w(i_2, 1), \dots, w(i_n, 1)$ образуют антицепь в классе $X(t, l)$.
2. Если $j \leq t$, то слова $w(i_1, j), w(i_2, j), \dots, w(i_n, j)$ образуют антицепь в классе $X(t, l)$.

Получено противоречие с тем, что класс $X(t, l)$ — n -светлый. Тем самым, лемма доказана. \square

Предложение 4.4.1. $\beth(t, l, n) \leq \beth(t, l, n + 1)$

По лемме 4.4.3 $\beth(t, l, n) \leq \beth(2^s, l + 1, 2^s(n - 1) + 1)$, где $s = \lceil \log_2(t) \rceil$.

В силу замечания 4.4.1 $t < n$. Значит, $2^s < 2n$.

Следовательно, $\beth(2^s, l + 1, 2^s(n - 1) + 1) \leq \beth(2^s, l + 1, 2n^2)$.

По лемме 4.4.1 имеем

$$\begin{aligned} \beth(2^s, l + 1, 2n^2) &\leq \beth(2^{s-1}, (l + 1)^2, 2n^2) \leq \beth(2^{s-2}, (l + 1)^{2^2}, 2n^2) \leq \\ &\leq \beth(2^{s-3}, (l + 1)^{2^3}, 2n^2) \leq \dots \leq \beth(2, (l + 1)^{2^{s-1}}, 2n^2). \end{aligned}$$

По теореме 4.1.1 имеем $\beth(2, (l + 1)^{2^{s-1}}, 2n^2) < (l + 1)^{2^{s-1}} \cdot 4n^4 < 4(l + 1)^n n^4$.

То есть доказана следующая

Лемма 4.4.4. $\beth(t, l, n) < 4(l + 1)^n n^4$.

Чтобы применить лемму 4.4.4 к доказательству теоремы 4.1.5, требуется оценить число подслов не n -разбиваемого слова с одинаковыми периодами.

Лемма 4.4.5. *Если в некотором слове W найдутся $(2n - 1)$ подслов, в которых период повторится больше n раз, и их периоды попарно не сильно сравнимы, то W — n -разбиваемое.*

Доказательство. Пусть в некотором слове W найдутся $(2n - 1)$ подслов, в которых период повторится больше n раз, и их периоды попарно не сильно сравнимы. Пусть x — период одного из этих подслов. Тогда в слове W найдутся непересекающиеся подслова $x^{p_1}v'_1, \dots, x^{p_{2n-1}}v'_{2n-1}$, где p_1, \dots, p_{2n-1} — некоторые натуральные числа, большие n , а v'_1, \dots, v'_{2n-1} — некоторые слова длины $|x|$, сравнимые с x . Тогда среди слов v'_1, \dots, v'_{2n-1} найдутся либо n лексикографически больших x , либо n лексикографически меньших x . Можно считать, что v'_1, \dots, v'_n — лексикографически больше x . Тогда в слове W найдутся подслова $v'_1, xv'_2, \dots, x^{n-1}v'_n$, идущие слева направо в порядке лексикографического убывания. \square

Из этой леммы получаем следствие 4.1.6.

Рассмотрим не n -разбиваемое слово W . Если в нём найдётся подслово, в котором нециклический период x длины не меньше n повторится больше $2n$ раз, то в слове x^2 подслова, которые начинаются с первой, второй, \dots , n -ой позиции, попарно сравнимы. Значит, слово x^{2n} является n -разбиваемым. Получаем противоречие с не n -разбиваемостью слова W . Из лемм 4.4.5 и 4.4.4 получаем, что существенная высота слова W меньше, чем $(2n - 1) \sum_{t=1}^{n-1} \beth(t, l, n) < 8(l + 1)^n n^5(n - 1)$. Значит, $\Upsilon(n, l) < 8(l + 1)^n n^5(n - 1)$. Тем самым, теорема 4.1.5 доказана.

Глава 5

Оценки числа перестановочно упорядоченных множеств

5.1 Введение и основные понятия

Определение 5.1.1. Частично упорядоченное множество M называется *перестановочно упорядоченным*, если порядок на нём есть пересечение двух линейных порядков.

Рассмотрим теперь некоторую перестановку π элементов $1, 2, \dots, n$ (иначе говоря, $\pi \in S_n$). Определим понятие k -разбиваемости.

Определение 5.1.2. Пусть для перестановки $\pi \in S_n$ найдётся последовательность натуральных чисел $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ таких, что $\pi(i_1) \geq \pi(i_2) \geq \dots \geq \pi(i_k)$. Тогда перестановка $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)$ называется k -разбиваемой.

Пример 5.1.1. Количество не 3-разбиваемых перестановок в группе S_n есть n -е число Каталана и равно $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Предложение 5.1.1. Если слово является k -разбиваемым, то для любого $t < k$ оно также является t -разбиваемым.

Далее нам потребуется определение диаграммы Юнга.

Определение 5.1.3. (Стандартной) диаграммой Юнга порядка n называется таблица, в ячейках которой написаны n различных натуральных чисел, причём суммы чисел в каждой строке и каждом столбце возрастают, между числами нет пустых ячеек и есть элемент, который содержится и в первой строке, и в первом столбце.

Определение 5.1.4. Диаграмма Юнга называется *диаграммой формы* $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, если у неё m строк и i -я строка имеет длину p_i .

Формы диаграмм Юнга пробегают все возможные разбиения на циклы элементов симметрической группы S_n . Любой класс сопряжённости группы S_n задаётся некоторым разбиением на циклы. Каждому классу сопряжённости группы соответствует некоторое её неприводимое представление. Следовательно, форма диаграммы Юнга соответствует неприводимому представлению группы S_n .

Пронумеруем все клетки диаграммы Юнга формы p числами от 1 до n . Пусть h_k — количество клеток диаграммы Юнга, расположенных

- либо в одной строке, либо в одном столбце с клеткой с номером k ,
- находящихся не левее или не выше клетки с номером k .

Тогда число диаграмм Юнга формы p и равная ему размерность соответствующего неприводимого представления группы S_n , вычисляются по “формуле крюков” $\frac{n!}{\prod_{k=1}^n h_k}$.

В работе [62] приведена биекция между перестановками π чисел $1, 2, \dots, n$ и заполненных теми же числами парами диаграмм Юнга (P, Q) . Эта биекция и её следствия будут разобраны в главе 5.3.

В нашей работе мы доказываем следующие результаты:

Теорема 5.1.1. $\xi_k(n)$ — количество не $(k+1)$ -разбиваемых перестановок $\pi \in S_n$ — не больше, чем $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$.

Теорема 5.1.2. $\varepsilon_k(n)$ — количество n -элементных перестановочно упорядоченных множеств с максимальной антицепью длины k — не больше, чем $\min\{\frac{k^{2n}}{(k!)^2}, \frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}\}$.

Следствие 5.1.1. Пусть F является множеством слов алфавита из l букв с введённым на них лексикографическим порядком. Назовём полилинейным слово, все буквы которого различны. Назовём слово k -разбиваемым, если в нём найдутся k непересекающихся подслов, идущих в порядке лексикографического убывания. Тогда количество полилинейных слов длины n ($n \leq l$), не являющихся $(k+1)$ -разбиваемыми, не больше, чем $\frac{l!k^{2n}}{n!(l-n)!((k-1)!)^2}$.

Оценка в теореме 5.1.1 улучшает полученную в работе [60]. Следует сказать, что оценка на $\xi_k(n)$ в работе [60] была получена для доказательства теоремы Регева, вопрос же о её точности не ставился. Оценка в работе [60] доказывается с помощью теоремы Дилуорса. Применение теоремы Дилуорса в некоторых других задачах комбинаторики слов описано в работе [54].

В работе [55] доказывается, что для для определённой функции $K(n) = o(\sqrt[3]{n} \ln n)$ и числа $k \leq K(n) = o(\sqrt[3]{n} \ln n)$ верна асимптотическая оценка $\xi_k(n) = k^{2n-o(n)}$.

Для получения производящей функции в работе [59] введено следующее понятие:

Определение 5.1.5. Обобщённой диаграммой Юнга формы (p_1, p_2, \dots, p_m) , где $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_m \geq 1$, называется массив Y положительных чисел y_{ij} , где $1 \leq j \leq p_i$, $1 \leq i \leq m$, такой, что числа в его строках не убывают, а в столбцах возрастают.

Ещё требуются двухстрочные массивы следующего типа.

Определение 5.1.6. Набор пар положительных чисел $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N)$ такой, что пары (u_k, v_k) расположены в неубывающем лексикографическом порядке, называется набором типа $\alpha(N)$.

В работе [59] устанавливается биекция между наборами типа $\alpha(N)$ и парами (P, Q) обобщённых диаграмм Юнга порядка N (т. е. состоящих из N ячеек). Кроме того, существует взаимно-однозначное соответствие между рассматриваемыми наборами и матрицами, в которых число в ячейке из i -ой строки и j -го столбца равно количеству пар (i, j) в

наборе. В работе [56] на основании функций Шура s_λ , которые также являются производящими функциями для обобщённых диаграмм Юнга, строится производящая функция для $\xi_k(n)$. Однако сложность построения явной формулы для $\xi_k(n)$ растёт экспоненциально по k . К примеру, $\xi_3(n) = 2 \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{n}{k}^2 \frac{3k^2+2k+1-n-2kn}{(k+1)^2(k+2)(n-k+1)}$.

5.2 Алгебраические обобщения

В 1950 году Шпехт ([64]) поставил проблему существования бесконечно базлируемого многообразия ассоциативных алгебр над полем характеристики 0. Решение проблемы Шпехта для нематричного случая представлено в докторской диссертации В. Н. Латышева [61]. Рассуждения В. Н. Латышева основывались на применении техники частично упорядоченных множеств. А. Р. Кемер ([58]) доказал, что каждое многообразие ассоциативных алгебр конечно базлируемо, тем самым решив проблему Шпехта.

Первые примеры бесконечно базлируемых ассоциативных колец были получены А. Я. Беловым ([53]), А. В. Гришиным ([57]) и В. В. Щиголевым ([63]).

После решения проблемы Шпехта в случае характеристики 0 актуален вопрос, поставленный Латышевым.

Введём некоторый порядок на словах алгебры над полем. Назовём *обструкцией* полилинейное слово, которое

- является уменьшаемым (т. е. является комбинацией меньших слов);
- не имеет уменьшаемых подслов;
- не является изотонным образом уменьшаемого слова меньшей длины.

Вопрос 5.2.1 (Латышев). *Верно ли, что количество обструкций для полилинейного T -идеала конечно?*

Из проблемы Латышева вытекает полилинейный случай проблемы конечной базлируемости для алгебр над полем конечной характеристики. Наиболее важной обструкцией является обструкция $x_n x_{n-1} \dots x_1$, её изотонные образы составляют множество не n -разбиваемых слов.

В связи с этими вопросами возникает проблема:

Вопрос 5.2.2. *Перечислить количество полилинейных слов, отвечающих данному конечному набору обструкций. Доказать элементарность соответствующей производящей функции.*

5.3 Доказательство основных результатов

Лемма 5.3.1 ([62]). *Существует взаимоднозначное соответствие между перестановками $\pi \in S_n$ и парами (P, Q) стандартных диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до n и такими, что форма P совпадает с формой Q .*

Доказательство. Пусть $\pi = x_1 x_2 \dots x_n$. Построим по ней пару диаграмм Юнга (P, Q) . Сначала построим диаграмму P .

Определим операцию $S \leftarrow x$, где S — диаграмма Юнга, x — натуральное число, не равное ни одному из чисел в диаграмме S .

1. Если x не меньше самого правого числа в первой строке S (если в ней нет чисел, то будем считать, что x больше любого из них), то добавляем x в конец первой строки диаграммы S . Полученная диаграмма $S \leftarrow x$.
2. Если найдётся большее, чем x , число в первой строке S , то пусть y — наименьшее число в первой строке, такое что $y > x$. Тогда заменим y на x . Далее проводим с y и второй строкой те же действия, что проводили с x и первой строкой.
3. Продолжаем этот процесс строка за строкой, пока какое-нибудь число не будет добавлено в конец строки.

Из построения $S \leftarrow x$ получаем, что вновь полученная таблица будет диаграммой Юнга.

Пусть $P = (\dots((x_1 \leftarrow x_2) \leftarrow x_3) \dots \leftarrow x_n)$. Тогда P является диаграммой Юнга и соответствует перестановке π . Пусть диаграмма Q получается из диаграммы P путём замены x_i на i для всех i от 1 до n . Тогда Q также является диаграммой Юнга.

Далее в работе [62] показывается, что приведённое построение пар диаграмм Юнга (P, Q) по перестановкам $\pi \in S_n$ взаимнооднозначно. \square

Из алгоритма, приведённого в доказательстве леммы 5.3.1 следует

Лемма 5.3.2 ([62]). *Количество строк в диаграмме P равно длине максимальной убывающей подпоследовательности символов в $\pi = x_1 x_2 \dots x_n$.*

Приступим теперь непосредственно к доказательству теоремы 5.1.1.

Рассмотрим перестановку $\pi = x_1 x_2 \dots x_n$. Она не $(k + 1)$ -разбиваема тогда и только тогда, когда в соответствующих ей диаграммах P и Q не больше k строк.

Покрасим числа от 1 до n в k цветов произвольным образом. Таких раскрасок k^n . Рассмотрим теперь таблицы (не Юнга!), построенные следующим образом. Теперь для каждого i от 1 до k поместим в i -ю строку строимой таблицы числа i -го цвета в возрастающем порядке так, чтобы наименьшее число в строке стояло в первом столбце и между числами в одной строке не было пустых ячеек (но целиком пустые строки быть могут). Назовём полученные таблицы *таблицами типа $\beta(n, k)$* . Между раскрасками в k цветов чисел от 1 до n и таблицами типа $\beta(n, k)$ есть естественная биекция, следовательно, таблиц типа $\beta(n, k)$ будет ровно k^n . Заметим, что любая диаграмма Юнга, заполненная числами от 1 до n с не более, чем k строками, будет таблицей типа $\beta(n, k)$. Будем считать, что таблицы A и B типа $\beta(n, k)$ эквивалентны ($A \sim_\beta B$), если одну из другой можно получить при помощи перестановки строк. Тогда если в таблице типа $\beta(n, k)$ не больше одной пустой строки, то в соответствующем классе эквивалентности будет ровно $k!$ элементов. Так как в диаграммах Юнга числа в столбцах строго упорядочены по возрастанию, то в каждом классе эквивалентности таблиц типа $\beta(n, k)$ будет не более одной диаграммы Юнга. Если в диаграмме Юнга ровно k строк, то в соответствующей таблице типа $\beta(n, k)$ не будет пустых строк. Следовательно, диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до n и имеющих ровно k строк, не больше, чем $\frac{k^n}{k!}$.

Если в диаграмме Юнга k строк, то в ней не больше, чем $(n - k + 1)$ столбец. Раскрасим числа от 1 до n в $(n - k + 1)$ цвет. Рассмотрим теперь таблицы (не Юнга!), построенные

следующим образом. Теперь для каждого i от 1 до $(n - k + 1)$ поместим в i -й столбец строимой таблицы числа i -го цвета в возрастающем порядке так, чтобы наименьшее число в столбце стояло в первой строке и между числами в одном столбце не было пустых ячеек (но целиком пустые столбцы быть могут). Назовём полученные таблицы *таблицами типа* $\gamma(n, k)$. Между раскрасками в $(n - k + 1)$ цветов чисел от 1 до n и таблицами типа $\gamma(n, k)$ есть естественная биекция, следовательно, таблиц типа $\gamma(n, k)$ будет ровно k^n . Заметим, что любая диаграмма Юнга, заполненная числами от 1 до n с k строками, будет таблицей типа $\gamma(n, k)$. Будем считать, что таблицы A и B типа $\gamma(n, k)$ эквивалентны ($A \sim_\gamma B$), если одну из другой можно получить при помощи перестановки столбцов. Пусть в таблице A ровно t ненулевых столбцов. Всего таблиц типа $\gamma(n, k)$ с t ненулевыми строками будет не более, чем таблиц типа $\gamma(n, n - t + 1)$, т. е. не более t^n . В классе эквивалентности таблицы типа $\gamma(n, k)$ с t непустых столбцов будет $(\min\{t + 1, n - k + 1\})!$ элементов. При этом таблиц с $(n - k)$ или $(n - k + 1)$ столбцов будет не более $(n - k + 1)^n$ и в каждом классе эквивалентности среди них будет $(n - k + 1)!$ элементов. Так как в диаграммах Юнга числа в строках строго упорядочены по возрастанию, то в каждом классе эквивалентности таблиц типа $\gamma(n, k)$ будет не более одной диаграммы Юнга. Следовательно, среди таблиц типа $\gamma(n, k)$ будет не более $\frac{(n-k+1)^n}{(n-k+1)!} + \sum_{t=1}^{n-k-1} \frac{t^n}{t!} \leq \frac{(n-k+1)^n}{(n-k)!}$ диаграмм Юнга.

Значит, пар диаграмм Юнга, в каждой из которых по k строк, не больше, чем $\min\{\frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}, \frac{k^{2n}}{(k!)^2}\}$. Следовательно, существует не больше $\min\{\frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}, \frac{k^{2n}}{(k!)^2}\}$ перестановок $\pi \in S_n$ с длиной максимальной убывающей подпоследовательности ровно k .

Каждая перестановка соответствует с точностью до изоморфизма паре линейных порядков из n элементов. Порядок в перестановочно упорядоченном множестве есть пересечение двух линейных порядков. Так как у каждой пары линейных порядков ровно одно их пересечение, то по леммам 5.3.1 и 5.3.2 количество перестановочно упорядоченных множеств порядка n с максимальной антицепью длины k не больше, чем $\min\{\frac{(n-k+1)^{2n}}{((n-k)!)^2}, \frac{k^{2n}}{(k!)^2}\}$. Тем самым теорема 5.1.2 доказана.

Замечание 5.3.1. Отметим, что по перестановочно упорядоченному множеству не всегда можно определить, какой именно парой линейных порядков оно порождено. Например, рассмотрим множество $\{p_i\}_{i=1}^{15}$ с порядком $(p_1 > p_2 > p_3, p_4 > p_5 > \dots > p_8, p_9 > \dots > p_{15})$. Оно могло быть порождено:

- парой линейных порядков с соотношениями $(p_3 > p_4, p_8 > p_9)$ и $(p_3 < p_4, p_8 < p_9)$,
- парой линейных порядков с соотношениями $(p_3 > p_9, p_{15} > p_1)$ и $(p_3 < p_9, p_{15} < p_1)$.

Эти 2 пары линейных порядков не изоморфны друг другу.

Оценим $\Delta_k(n)$ — количество диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до n и имеющих не больше k строк.

Лемма 5.3.3. Верно неравенство $\Delta_k(n) \leq \frac{k^n}{(k-1)!}$.

Доказательство. Как показывалось ранее, если в таблице типа $\beta(n, k)$ не больше одной пустой строки, то в соответствующем классе эквивалентности будет ровно $k!$ элементов. Следовательно, диаграмм Юнга, заполненных числами от 1 до n и имеющих либо $(k - 1)$,

либо k строк, не больше $\frac{k^n}{k!}$. Значит, для $k < 3$ лемма доказана. Пусть она доказана для $k < t$. Тогда для $k = t$ имеем $\Delta_k(n) \leq \frac{k^n}{k!} + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i^n}{(i-1)!} \leq \frac{k^n}{(k-1)!}$. \square

Значит, пар диаграмм Юнга порядка n , в каждой из которых по $\leq k$ строк, не больше, чем $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$. Следовательно, по леммам 5.3.1 и 5.3.2 количество не $(k+1)$ -разбиваемых перестановок $\pi \in S_n$ меньше $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$. Тем самым теорема 5.1.1 доказана.

Выведем из теоремы 5.1.1 следствие 5.1.1. Для каждого набора букв $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}$ количество не $(k+1)$ -разбиваемых полилинейных слов длины n , составленных из этого набора букв, не больше, чем $\frac{k^{2n}}{((k-1)!)^2}$. Каждому полилинейному слову отвечает ровно один набор из n букв. Так как наборов из n букв ровно $\binom{l}{n}$, то количество не $(k+1)$ -разбиваемых полилинейных слов длины n не больше, чем $\frac{l!k^{2n}}{n!(l-n)!((k-1)!)^2}$. Тем самым, следствие 5.1.1 доказано.

5.4 Обобщенные диаграммы Юнга и их производящие функции

Лемма 5.4.1 ([59]). *Существует взаимнооднозначное соответствие между наборами типа $\alpha(N)$ и парами (P, Q) обобщённых диаграмм Юнга порядка N у которых форма P совпадает с формой Q .*

Доказательство. Определим операцию $S \leftarrow x$, где S — обобщённая диаграмма Юнга, x — натуральное число, так же, как в доказательстве леммы 5.3.1. Сопоставим некоторому набору типа $\alpha(N)$ из пар $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_N, v_N)$ диаграмму Юнга $P = (\dots((v_1 \leftarrow v_2) \leftarrow v_3) \dots \leftarrow v_N)$. Пусть диаграмма Q получается из диаграммы P путём замены v_i на u_i для всех i от 1 до N . Тогда Q также является диаграммой Юнга.

Далее в работе [59] показывается, что приведённое построение пар обобщённых диаграмм Юнга (P, Q) по наборам типа α взаимнооднозначно. \square

Обозначение 5.4.1. *Перестановка $\pi \in S_n$ является набором типа $\alpha(n)$ из пар $(1, \pi(1)), \dots, (n, \pi(n))$.*

Симметрические функции.

Здесь и далее считаем, что множество индексов при переменных симметрических функций является множеством натуральных чисел.

Напомним несколько понятий из теории симметрических функций.

Полная симметрическая функция h_n равна $h_n = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$.

Пусть λ — набор $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ для некоторого натурального k . Пусть также $|\lambda| = \sum_{i=1}^k \lambda_i$. Набор λ называется *разбиением*, если $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$.

Функция Шура S_λ равна $S_\lambda = \det(h_{\lambda_i + j - i})_{1 \leq i, j \leq k}$.

В работе [56] определяются функции $b_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+i}}{n!(n+i)!}$ и $U_k = \det(b_{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq k}$.

Также вводится функция $R_k(x, y)$ как $R_k(x, y) = \sum_k s_\lambda(x) s_\lambda(y)$, где сумма берётся по всем разбиениям на не более чем k частей. Тогда коэффициент при $x_1 x_2 \dots x_n y_1 \dots y_n$ в функции $R_k(x, y)$ равен $\xi_k(n)$. Из этого в [56] выводится, что $U_k = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_k(n) \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$.

Количество полилинейных слов длины n над l -буквенным алфавитом ($n \leq l$), в каждом из которых не найдётся последовательности из $(k+1)$ буквы в порядке лексикографического убывания есть $\binom{l}{n} \xi_k(n)$.

Глава 6

Дальнейшее улучшение оценок высоты

Представленная вниманию читателя техника, возможно, позволяет улучшить полученную в данной работе оценку, но при этом она останется только субэкспоненциальной. Для получения полиномиальной оценки, если она существует, требуются новые идеи и методы.

В главах 2 и 3 подслова большого слова используются прежде всего в качестве множества независимых элементов, а не набора тесно связанных друг с другом слов. Далее используется то, что буквы внутри подслов раскрашены. При учёте раскраски только первых букв подслов получается экспоненциальная оценка. При рассмотрении раскраски всех букв подслов опять получается экспонента. Данный факт имеет место из-за построения иерархической системы подслов. Не исключено, что подробное рассмотрение приведенной связи подслов вкупе с изложенным выше решением позволит улучшить полученную оценку вплоть до полиномиальной.

В работе получены оценки на высоту, линейные по числу образующих l . На самом деле точные оценки на высоту также линейны по l . Следовательно, если какие-либо оценки будут доказаны для случая $l = 2$, то с помощью перекодировки образующих можно получить общий случай. Модельный пример применения механизма перекодировки можно найти в секции 4.4. Заметим, что в этой секции оценки изначально доказываются не для конкретного числа образующих, а для конкретного базиса Ширшова.

Представляется перспективным перевод основных понятий доказательства теоремы Ширшова на язык графов. По написанному выше, можно считать, что у нас две образующие: 0 и 1. Рассмотрим некоторое очень длинное не n -разбиваемое слово W с раскрашенными в соответствии с теоремой Дилуорса позициями (см., например, подсекцию 2.1.2). Теперь возьмём подслово u слова W , достаточно большое для того, что если мы возьмём подслово v слова W , в два раза большее u по длине и, в свою очередь, содержащее u как подслово, то число цветов позиций, встречающихся в v , примерно равно аналогичному числу в u . Рассмотрим теперь бинарное корневое дерево. Отметим у каждой невисячей вершины левого сына как 0, а правого — как 1. Корневую вершину никак отмечать не будем. Пусть глубина дерева крайне мала по сравнению с длиной слова u . Заметим, что для любого натурального k любое слово над бинарным алфавитом длины k может быть представлено как путь длины k , начинающийся из корня рассмотренного бинарного графа.

Теперь для каждого подслова слова u длины k рассмотрим в графе соответствующий путь и покрасим этот путь в цвет первой позиции соответствующего k -начала. Естественно, некоторые ребра будут покрашены по несколько раз. Полученная картина — слишком пёстрая, чтобы сделать какие-либо выводы. Поэтому для каждого цвета оставим самый левый путь этого цвета. Назовём полученную структуру *деревом подслов* (сравните это

дерево с наборами $B^p(i)$ из подсекции 2.2.2). Так как u — подслово слова W , можно представить себе его как “окно” определённой длины, положенное на слово W . Теперь будем двигать это окно вправо шагом в одну позицию. На каждом шаге будем перерисовывать дерево позиций. Назовём изменение дерева позиций при движении окна вправо *эволюцией дерева подслов*. Пусть в слове W нет периодов длины n , то есть рассматриваем так называемый ниль-случай. Если взять $k = n$, то по лемме 2.1.3 при сдвиге окна на n^2 позиций дерево позиций точно изменится. Если дерево позиций хорошо сбалансировано, то есть мало групп цветов, имеющих длинную общую часть пути, то дерево довольно быстро эволюционирует, более того, количество изменений в нём будет ограничено полиномом. Однако если дерево подслов не сбалансировано, то некоторые ветки дерева “перегружаются” цветами. В подсчёте того, до какой степени ветки могут быть перегружены цветами, быть может, кроется получение полиномиальной оценки на высоту.

Рассмотренный выше граф одинаково применим как для оценки индекса нильпотентности, так и для оценки существенной высоты. Ниже построен граф, который можно построить на периодических подсловах при оценке существенной высоты. Пусть t — длина периода.

Пусть слово W не n -разбиваемо. Как и прежде, рассмотрим некоторое множество попарно непересекающихся несравнимых подслов слова W вида z^m , где $m > 2n$, z — t -буквенное нециклическое слово. Будем называть элементы этого множества *представителями*, имея в виду, что эти элементы являются представителями различных классов эквивалентности по сильной сравнимости. Пусть набралось t таких представителей. Пронумеруем их всех в порядке положения в слове W (первое — ближе всех к началу слова) числами от 1 до t . В каждом выбранном представителе в качестве подслов содержатся ровно t различных t -буквенных слов.

Введём порядок на этих словах следующим образом: $u \prec v$, если

- u лексикографически меньше v ;
- представитель, содержащий u левее представителя, содержащего v .

Из не сильной n -разбиваемости получаем, что максимальное возможное число попарно несравнимых элементов равно t . По теореме Дилуорса существует разбиение рассматриваемых t -буквенных слов на t цепь. Раскрасим слова в t цвет в соответствии с их принадлежностью к цепям. Раскрасим позиции, с которых начинаются слова, в те же цвета, что и соответствующие слова.

Напомним, что *слово-цикл* u — слово u со всеми его сдвигами по циклу.

Рассмотрим ориентированный граф G с вершинами вида (k, i) , где $0 < k < n$ и $0 < i \leq l$. Первая координата обозначает цвет, а вторая — букву.

Ребро с некоторым весом j выходит из (k_1, i_1) в (k_2, i_2) , если

- для некоторых i_3, i_4, \dots, i_t в j -ом представителе содержится слово-цикл $i_1 i_2 \dots i_t$;
- позиции, на которых стоят буквы i_1, i_2 раскрашены в цвета k_1, k_2 соответственно.

Таким образом, граф G состоит из ориентированных циклов длины t . Теперь нам требуется найти показатель, который бы строго монотонно рос с появлением каждого нового представителя при движении от начала к концу слова W . Можно заметить, что как и в случае дерева подслов, мы естественным образом столкнулись с понятием эволюции графов. Только в данном случае “окно” может “растягиваться”, то есть его левый край остаётся на месте, а правый движется вправо. Разбалансировка же выражается также — в длинных путях, которые по очереди входят в разные циклы длины t . Отметим, что конструкция

графа G близка к конструкции графов Рози. Обзор тематики графов Рози можно найти в [31].

Интересно также получить оценки на высоту алгебры над множеством слов степени не выше сложности алгебры (в англоязычной литературе PI-degree). В работе [13] получены экспоненциальные оценки, а для слов, не являющихся линейной комбинацией лексикографически меньших, в работе [47] получены надэкспоненциальные оценки.

Приложение 1. Комбинаторика слов

1. Проблема Куроша-Левицкого для конечно порождённых

- ниль-алгебр конечного ниль-индекса
- алгебр конечного индекса

Теорема Ширшова о высоте. Множество всех не n -разбиваемых слов в конечно порождённой алгебре с допустимым полиномиальным тождеством имеет ограниченную высоту H над множеством слов степени не выше $n - 1$.

Литература: [2, 13, 46].

2. Определение. Ассоциативное слово называется *правильным*, если оно лексикографически больше любого своего циклического сдвига.

Неассоциативное слово называется *правильным*, если оно правильное в ассоциативном смысле и

- если $[u] = [[v][w]]$, то v и w — правильные слова,
- если $[u] = [[v_1][v_2]][w]$, то $v_2 \leq w$.

Теорема Ширшова. В правильном в ассоциативном смысле слове существует единственный способ расставить Лиевы скобки так, чтобы полученное слово было правильным в неассоциативном смысле.

Правильные слова образуют базис свободной алгебры Ли.

Литература: [13, 46, 10, 69].

3. Определение. Назовём слово u полуправильным, если любой его конец либо лексикографически меньше u , либо является началом u .

Теорема. Любое бесконечное слово над конечным алфавитом содержит подслово fgf , где f — полуправильное, а g — правильное (возможно, пустое) слово.

Литература: [13], [69].

4. Теорема Ван дер Вардена. Пусть n и k — натуральные числа, последовательность натуральных чисел разбита на k множеств. Тогда найдётся число $f(n, k)$ такое, что среди первых $f(n, k)$ натуральных чисел найдётся арифметическая прогрессия длины n из одного множества.

Многомерное обобщение для фигур и гомотетии с положительным коэффициентом.

Литература: [70, 71].

5. Построение фрактала Розы с помощью чисел Трибоначчи.

Литература: [86].

6. **Теорема.** Слово от n букв избегаемо тогда и только тогда, когда ни одно из его значений не является подсловом Z_n .
Литература: [69, 65, 73].
7. **Определение.** Группа удовлетворяет условию $C'(\lambda)$, когда общая часть любых двух порождающих соотношений меньше, чем λ , умноженное на длину любого из них.
Лемма Гриндлингера. В карте, удовлетворяющей условию $C'(\frac{1}{6})$, найдётся клетка, большая часть границы которой лежит на границе карты.
Алгебраическая формулировка с группами и соотношениями.
Литература: [65, 72].
8. **Теорема Реева.** Если алгебры A и B удовлетворяют полиномиальному тождеству, то алгебра $A \otimes_F B$ также удовлетворяет полиномиальному тождеству.
Литература: [80, 60].
9. Биекция между словами и парами диаграмм Юнга.
Литература: [62, 59].
10. **Определение.** $p_w(n)$ — количество подслов длины n в слове w .
Слово w называется *уравновешенным*, если в любых двух его подсловах одинаковой длины количество единиц различается не больше, чем на 1.
Теорема. Эквивалентность трёх определений слов Штурма:
 - $p_w(n) = n + 1$
 - w — уравновешенное непериодичное слово
 - w — механическое слово с иррациональным углом наклона
 Литература: [31, 75].

Приложение 2. Алгоритмические методы в теории колец

1. Приведённые ниже факты отдельно доказывались для ε - и *Lie*- алгебр, но доказательства и формулировки для различных типов алгебр похожи, поэтому ниже приведена попытка объединения формулировок.

А.И. Ширшов ввёл и доказал следующие понятия и теоремы:

Определение Слова длины 1 назовем Ω -правильными ($\Omega = K, AK, Lie$) словами и произвольно упорядочим. Считая, что Ω -правильные слова, длина которых меньше n , $n > 1$, уже определены и упорядочены каким-то способом так, что слова меньшей длины предшествуют словам большей длины, назовем слово w длины n Ω -правильным, если

- (а) $w = uv$, где u, v — Ω -правильные слова;
- (б) $u \geq v$ при $\Omega = K$ и $u > v$ при $\Omega = AK, Lie$;
- (с) (Только для $\Omega = Lie$) если $u = u_1u_2$, то $u \leq v$.

Теорема 1. Правильные слова образуют базис свободной Ω -алгебры.

Теорема 2. Всякая подалгебра свободной Ω -алгебры свободна.

Проблема тождества для Ω -алгебр. Существует ли алгоритм, который для произвольного конечного множества S и произвольного элемента a из Ω -алгебры позволяет выяснить, принадлежит ли a идеалу $\langle S \rangle$.

Теорема о тождестве 1. Пусть S — некоторое фиксированное множество элементов свободной Ω -алгебры E . Тогда существует алгоритм, позволяющий за конечное число шагов определить, принадлежит ли произвольный элемент $t \in E$ идеалу $\langle S \rangle$.

Следствие. Существует алгоритм, решающий проблему тождества для алгебр Ли с одним определяющим соотношением.

Теорема о тождестве 2. Существует алгоритм, решающий проблему тождества для алгебр Ли с однородными множествами определяющих соотношений.

Теорема о свободе. Пусть E_0 — Ω -алгебра с множеством порождающих R и одним определяющим соотношением $s = 0$, в левую часть которого входит образующий a_α . Тогда подалгебра E'_0 , порождённая в алгебре E_0 множеством $R \setminus a_\alpha$, свободна.

Литература: [6, 7, 10, 11, 12, 13].

2. **Определение.** Группа удовлетворяет условию $C''(\lambda)$, когда общая часть любых двух порождающих соотношений меньше, чем λ , умноженное на длину любого из них.

Лемма Гриндлингера. В карте, удовлетворяющей условию $C'(\frac{1}{6})$, найдётся клетка, большая часть границы которой лежит на границе карты.

Алгебраическая формулировка с группами и соотношениями.

Алгоритм Дена-Гриндлингера определения тривиальности группового слова в группе с конечным числом соотношений.

Литература: [65, 72].

3. **Diamond-lemma.** Пусть M — ЧУМ, в котором любая убывающая цепь — конечна.

Определение. *Отношение Чёрча-Россера:* $x \rightsquigarrow y$, если x и y есть общий потомок. Представим M в виде графа Ньюмана с множеством рёбер R . Тройка (M, \leq, R) называется *схемой симплификации*. Следующие условия эквивалентны:

- (a) M — обладает свойством каноничности (т.е. у каждого $m \in M$ нормальная форма единственна).
- (b) Отношение Чёрча-Россера — транзитивно.
- (c) Выполняется условие локального слияния (“у любых двух братьев есть общий потомок”).
- (d) В любой компоненте связности лежит ровно один минимальный элемент.
- (e) $(x \sim y, \text{ т.е. между } x \text{ и } y \text{ есть неориентированный путь}) \iff (x \rightsquigarrow y)$.

Определение. Введём на мономах X^* линейный порядок $<$ такой, что для любого монома $z \in X^*$ имеет место $x < y \Rightarrow xz < yz$. *Базис Грёбнера-Ширшова* некоторого идеала $I \triangleleft k\langle X \rangle$ — это конечное множество полиномов G , порождающее идеал I , причём старший моном \bar{h} любого полинома $h \in I$ делится на некоторый старший моном \bar{g} полинома из базиса Грёбнера-Ширшова.

Элемент h обладает *H -представлением* относительно системы порождающих G , если в представлении $h = \sum \alpha_i u_i g_i v_i$ любой моном $u_i \bar{g}_i v_i$ не больше, чем \bar{h} .

Определим для полинома $f \in k\langle X \rangle$ его *supp*(f) — упорядоченное множество составляющих его мономов. Тогда лексикографический порядок на суппортах полиномов индуцирует частичный порядок \leq_{supp} на полиномах $k\langle X \rangle$.

Теорема. Следующие условия эквивалентны.

- (a) G — базис Грёбнера-Ширшова I .
- (b) Любой элемент I редуцируется относительно G к нулю.
- (c) Любой $h \in I$ обладает H -представлением относительно G .
- (d) Схема $(k\langle X \rangle, \leq_{\text{supp}}, R_G)$ обладает свойством каноничности.

Литература: [76, 77, 78].

4. **Теорема (Морс–Туэ, [81, 82]).** Пусть $X = \{a, b\}$, X^* — множество слов над алфавитом X , подстановка φ задана соотношениями $\varphi(a) = ab$, $\varphi(b) = ba$. Тогда если слово $w \in X^*$ — бескубное, то и $\varphi(w)$ — бескубное.

Теорема (Туэ–1, [81]). Пусть $X = \{a, b, c\}$, X^* — множество слов над алфавитом X , подстановка φ задана соотношениями $\varphi(a) = abcab$, $\varphi(b) = acabcb$, $\varphi(c) = acbcacb$. Тогда если слово $w \in X^*$ — бесквадратное, то и $\varphi(w)$ — бесквадратное.

Теорема (Туэ–2). Пусть L и N — алфавиты, N^* — множество слов над алфавитом N , для подстановки $\varphi : L \rightarrow N^*$ выполнены следующие условия:

- (а) если длина w не больше 3, то $\varphi(w)$ — бесквадратное;
- (б) если a, b — буквы алфавита L , а $\varphi(a)$ — подслово $\varphi(b)$, то $a = b$.

Тогда если слово $w \in L^*$ — бесквадратное, то и $\varphi(w)$ — бесквадратное.

Теорема (Крошмор, [85]). Пусть L и N — алфавиты, N^* — множество слов над алфавитом N , $\varphi : L \rightarrow N^*$ — подстановка, M — наибольший размер образа буквы алфавита L при подстановке φ , m — наименьший размер образа буквы L при той же подстановке, $k = \max\{3, 1 + [(M-3)/m]\}$. Тогда подстановка φ — бесквадратная в том и только в том случае, когда для любого бесквадратного слова w длины $\leq k$ слово $\varphi(w)$ будет бесквадратным.

Литература: [65, 81, 82, 83, 84, 85].

5. **Определение.** Алгебра называется *мономиальной*, если в ней есть базис определяющих соотношений вида $c = 0$, где c — слово от образующих алгебры.

Конечным автоматом (КА) с алфавитом X входных символов называется ориентированный граф, в котором выделено два (возможно пересекающиеся) множества вершин, называемых *начальными* и *финальными (конечными)* и каждое ребро помечено буквой из конечного алфавита X . Язык L называется *регулярным* или *автоматным*, если существует конечный автомат, допускающий слова из множества L и только их.

Автомат называется *детерминированным*, если

- (а) начальная вершина ровно одна;
- (б) из любой его вершины не может выходить более одного ребра, помеченного одной и той же буквой;
- (с) нет ребер, помеченных пустой цепочкой.

Предложение. для всякого недетерминированного КА существует детерминированный КА, допускающий то же самое множество слов.

Определение. Алгебра A называется *автоматной*, если множество ее ненулевых слов от образующих A является регулярным языком.

Предложение. Конечно определенная мономиальная алгебра является автоматной.

Определение. *Функция роста* $V_A(n)$ алгебры A — это размерность пространства, порождённого словами длины не выше n .

Если следующий предел существует, то его значение называется *размерностью Гельфанда–Кириллова* алгебры A и обозначается $GK(A)$:

$$GK(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(V_A(n))}{\ln(n)}.$$

Пусть $\Gamma(A)$ — минимальный детерминированный граф автоматной алгебры A . Назовем вершину графа *циклической*, если существует путь, начинающийся и заканчивающийся в этой вершине. Назовем вершину *дважды циклической*, если существуют два различных пути, начинающихся и заканчивающихся в этой вершине и не проходящих ни через одну другую вершину дважды.

Пусть граф Γ не имеет дважды циклических вершин. Назовем *цепью* подграф графа Γ , состоящий из последовательности ребер, в которой конец предыдущего ребра

является началом следующего, и никакая вершина не встречается дважды. Назовем *простым графом* подграф графа Γ , состоящий из конечного числа циклов, занумерованных числами $1, 2, \dots, d$, причем пары соседних циклов с номерами $i, i + 1$ соединены ровно одной цепью, направленной от i -го к $(i + 1)$ -му циклу. В первый цикл может входить одна цепь, и из последнего также может выходить одна цепь.

Теорема (Уфнаровский). Пусть A — автоматная алгебра, $\Gamma(A)$ — ее минимальный детерминированный граф.

- (a) Если $\Gamma(A)$ имеет вершину, принадлежащую двум различным циклам, то A имеет экспоненциальную функцию роста.
- (b) Если $\Gamma(A)$ не имеет дважды циклических вершин, то A имеет степенную функцию роста. Степень роста (размерность Гельфанда-Кириллова) равна количеству циклов в максимальном простом подграфе, содержащемся в $\Gamma(A)$.

Теорема. Пусть граф автоматной мономиальной алгебры A не имеет вершин, принадлежащих двум циклам. Тогда A вкладывается в алгебру матриц над полем.

Следствие. Пусть A — автоматная мономиальная алгебра, $\Gamma(A)$ — ее минимальный детерминированный граф. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) $\Gamma(A)$ не имеет дважды циклических вершин;
- (b) алгебра A имеет степенной рост;
- (c) алгебра A имеет не экспоненциальный рост;
- (d) алгебра A представима матрицами над полем;
- (e) в A выполняется полиномиальное тождество.

Литература: [13, 65, 69, 87, 88].

Предметный указатель

- H*-представление, 52
- n*-разбиение в хвостовом смысле, 16
- Автомат
 - детерминированный, 53
 - конечный, 53
- Алгебра
 - автоматная, 53
 - мономиальная, 53
- Базис
 - Грёбнера–Ширшова, 52
 - Ширшова, 8, 9
 - состоящий из слов, 9
- Вершина графа
 - конечная, 53
 - начальная, 53
 - финальная, 53
 - циклическая, 53
 - дважды, 53
- Высота
 - алгебры, 8
 - выборочная
 - большая, 29
 - малая, 29
 - множества, 29
 - множества, 7
 - слова, 26
 - существенная, 8, 9
- Граф
 - Ньюмана, 52
 - подслов, 46
 - большой длины, 33, 47
 - длины два, 31
 - длины три, 32
- Даймонд-лемма, 52
- Дерево подслов, 46
- Диаграмма Юнга
 - обобщённая, 40
 - стандартная, 39
- Индекс
 - алгебры, 6
 - нильпотентности, 5
- Класс nilпотентности, 5
- Лемма
 - Гриндлингера, 50, 52
 - о процессе, 19
 - основная
 - для nil-случая, 20
 - для общего случая, 25
- Множество
 - перестановочно упорядоченное, 39
- Ниль-индекс, 5
- Отношение Чёрча–Россера, 52
- Проблема
 - Бернсайда
 - для ассоциативных алгебр, 5
 - для групп, 4
 - Куроша, 6, 49
 - тождества, 51
- Размерность
 - Гельфанда–Кириллова, 53, 54
- Размерность Гельфанда–Кириллова, 7
- Свойство
 - каноничности, 52
- Слова
 - k*-начало, 16
 - k*-хвост, 16
 - несравнимые, 16
 - сравнимые
 - сильно, 22
 - хвост, 16, 18
- Слово
 - (*n, d*)-сократимое, 16
 - n*-разбиваемое, 10
 - в обычном смысле, 16

- в хвостовом смысле, 16
 - сильно, 23
- цикл, 22, 31, 47
- Зими́на, 50
- Штурма, 50
- нециклическое, 22
- полилинейное, 10
- полуправильное, 49
- правильное, 49, 51
- уравновешенное, 50
- циклическое, 22
- Теорема
 - Амицура–Левицкого, 13
 - Ван дер Вардена, 49
 - Дилуорса, 10, 19, 23, 40
 - Капланского, 6
 - Крошмора, 5, 53
 - Морса–Туэ, 4, 52
 - Регева, 10, 50
 - Туэ, 5, 52
 - Уфнаровского, 54
 - Ширшова для алгебр Ли, 49
 - Ширшова о высоте, 6, 49
 - о свободе, 51
- Тождество
 - стандартное, 7, 13
- Функция роста алгебры, 7, 53, 54
- Эволюция дерева подслов, 47
- Язык
 - автоматный, 53
 - регулярный, 53

Список литературы

1. W. Burnside. *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups*. Quart. J. Math., 33 (1902), 230–238.
2. А. Г. Курош. *Проблемы теории колец, связанные с проблемой Бёрнсайда о периодических группах*. Изв. АН СССР, Сер. Матем., 5(1941), 233–240.
3. I. Kaplansky. *On a problem of Kurosch and Jacobson*. Bull. AMer. Math. Soc., 52(1946), 496–500.
4. J. Levitzki. *On a problem of A. Kurosch*. Bull. AMer. Math. Soc., 52(1946), 1033–1035.
5. R. P. Dilworth. *A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets*. Annals of Mathematics, 51 (1), 1950, 161–166.
6. А. И. Ширшов. *Подалгебры свободных левых алгебр*. Матем. сб., **33(75)**:2 (1953), 441–452.
7. А. И. Ширшов. *Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр*. Матем. сб., **34(76)**:1 (1954), 81–88.
8. А. И. Ширшов. *О кольцах с тождественными соотношениями*. Матем. сб., 43(85):2 (1957), 277–283.
9. А. И. Ширшов. *О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах*. Матем. сб., 41(83):3 (1957), 381–394.
10. А. И. Ширшов. *О свободных алгебрах Ли*. Мат. сб., 1958, Т. 45(87), Ном. 2, 113–122.
11. А. И. Ширшов. *Некоторые алгоритмические проблемы для ε -алгебр*. Сиб. матем. ж., 3, 1 (1962), 132–137.
12. А. И. Ширшов. *Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли*. Сиб. матем. ж., 3, 2 (1962), 292–296.
13. A. J. Belov, V. V. Borisenko, V. N. Latysev. *Monomial Algebras*. NY. Plenum, 1997.
14. E. Zelmanov. *On the nilpotency of nilalgebras*. Lect. Notes Math., 1988, vol 1352, pages 227–240.
15. A. R. Kemer. *Comments on the Shirshov's Height Theorem*. in book: selected papers of A.I.Shirshov, Birkhäuser Verlag AG (2009), 41–48.
16. A. Kanel-Belov, L. H. Rowen. *Perspectives on Shirshov's Height Theorem*. in book: selected papers of A.I.Shirshov, Birkhäuser Verlag AG (2009), 3–20.

17. В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре*. Итоги науки и техн., Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 1990, No 57, 5–177.
18. V. Drensky, E. Formanek. *Polynomial identity ring*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona., Birkhauser Verlag, Basel, 2004.
19. С. В. Пчелинцев. *Теорема о высоте для альтернативных алгебр*. Мат. сб., 1984, т. 124, No 4, 557–567.
20. С. П. Мищенко. *Вариант теоремы о высоте для алгебр Ли*. Мат. заметки, 1990, т. 47, No 4, 83–89.
21. А. Я. Белов. *О базисе Ширшова относительно свободных алгебр сложности n* . Мат. сб., 1988, т. 135, No 31, 373–384.
22. A. Kanel-Belov, L. H. Rowen. *Computational aspects of polynomial identities*. Research Notes in Mathematics 9. AK Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2005.
23. Gh. Ciocanu. *Independence and quasiregularity in algebras. II*. Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat., 1997, No. 70, pages 70–77, 132, 134.
24. Gh. Ciocanu. *Local finiteness of algebras*. Mat. Issled., 1988, No. 105, Moduli, Algebrы, Topol., pages 153–171, 198.
25. Gh. Ciocanu, E. P. Kozhukhar. *Independence and nilpotency in algebras. (Russian. English, Russian, Moldavian summaries.)* Izv. Akad. Nauk Respub. Moldova Mat., 1993, No 2, pages 51–62, 92–93, 95.
26. Gh. Ciocanu. *Independence and quasiregularity in algebras* Dokl. Akad. Nauk, 1994, 337:3.
27. В. А. Уфнаровский. *Теорема о независимости и ее следствия*. Матем. сб., 1985, 128(170):1(9), 124–132.
28. V. A. Ufnarovskii, Gh. Ciocanu. *Nilpotent matrices*. Mat. Issled., 1985, No 85, Algebrы, Koltsa i Topologii, pages 130–141, 155
29. А. Я. Белов. *О рациональности рядов Гильберта относительно свободных алгебр*. Успехи мат. наук, 1997, т. 52, No 2, 153–154.
30. J. Berstel, D. Perrin. *The origins of combinatorics on words*. European Journal of Combinatorics 28 (2007) 996–1022.
31. M. Lothaire. *Combinatorics of words*. Cambridge mathematical library, 1983.
32. В. Н. Латышев. *Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств*. Фундамент. и прикл. матем., 12:2 (2006), 101–110.
33. А. Г. Колотов. *О верхней оценке высоты в конечно порожденных алгебрах с тождествами*. Сиб. мат. ж., 1982, т. 23, N 1, 187–189.
34. *Днестровская тетрадь: оперативно-информац. сборник*. 4-е изд., Новосибирск: изд. ин-та матем. СО АН СССР, 1993, 73 стр.
35. А. Ya. Belov. *Some estimations for nilpotency of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem*, Commun. Algebra 20 (1992), no. 10, 2919–2922.

36. V. Drensky. *Free Algebras and PI-algebras: Graduate Course in Algebra*. Springer-Verlag, Singapore (2000).
37. М. И. Харитонов. *Оценки на структуру кусочной периодичности в теореме Ширшова о высоте*. Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 1(2013), 10–16.
38. М. И. Харитонов. *Оценки на количество перестановочно упорядоченных множеств*. Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. В печати.
39. A. A. Klein. *Indices of nilpotency in a PI-ring*. Archiv der Mathematik, 1985, Volume 44, Number 4, pages 323–329.
40. A. A. Klein. *Bounds for indices of nilpotency and nility*. Archiv der Mathematik, 2000, Volume 74, Number 1, pages 6–10.
41. И. И. Богданов. *Теорема Нагаты-Хигмана для полукольца*. Фундамент. и прикл. матем., 7:3 (2001), 651–658.
42. C. Procesi. *Rings with polynomial identities*. N.Y., 1973, 189 pages.
43. А. Я. Белов. *Размерность Гельфанда–Кириллова относительно свободных ассоциативных алгебр*. Матем. сб., 195:12 (2004), 3–26.
44. Е. Н. Кузьмин. *О теореме Нагаты-Хигмана*. В сб. Трудов посвященный 60-летию акад. Илиева. София, 1975, 101–107.
45. Ю. П. Размыслов. *Тождества алгебр и их представлений*. М.: Наука, 1989, 432 стр.
46. К. А. Жевлаков, А. М. Слинько, И. П. Шестаков и А. И. Ширшов. *Кольца, близкие к ассоциативным, первое издание*. Современная алгебра, Москва (1978).
47. А. Я. Белов. *Проблемы бернсайдовского типа, теоремы о высоте и о независимости*. Фундамент. и прикл. матем., 13:5 (2007), 19–79.
48. A. A. Lopatin. *On the nilpotency degree of the algebra with identity $x^n = 0$* . Journal of Algebra, 371(2012), 350–366.
49. Е. С. Чибриков. *О высоте Ширшова конечнопорождённой ассоциативной алгебры, удовлетворяющей тождеству степени четыре*. Известия Алтайского государственного университета, 1(19), 2001 г., 52–56.
50. *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge mathematical press, 2002.
51. М. И. Харитонов. *Двусторонние оценки существенной высоты в теореме Ширшова о высоте*. Вестник Московского университета, Серия 1, Математика. Механика. 2(2012), 20–24.
52. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Субэкспоненциальные оценки в теореме Ширшова о высоте*. Мат. сб., 4(2012), 81–102 (see also arXiv: 1101.4909).
53. А. Я. Белов. *О нешпехтовых многообразиях*. Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 47–66.

54. А. Я. Белов, М. И. Харитонов. *Оценки высоты в смысле Ширшова и на количество фрагментов малого периода*. Фундамент. и прикл. матем., 17:5 (2012), 21–54.
55. Г. Р. Челноков. *О нижней оценке количества $k+1$ -разбиваемых перестановок*. Модел. и анализ информ. систем, Т. 14, 4(2007), 53–56.
56. I. M. Gessel. *Symmetric Functions and P-Recursiveness*. J. Combin. Theory Ser. A 53, 1990, 257–285.
57. А. В. Гришин. *Примеры не конечной базлируемости T -пространств и T -идеалов в характеристике 2*. Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 101–118.
58. А. Р. Кемер. *Конечная базлируемость тождеств ассоциативных алгебр*. Алгебра и логика, том 26, выпуск 5, 1987, 597–641.
59. D. E. Knuth. *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*. Pacific journal of mathematics, Vol. 34, No. 3, 1970, 709–727.
60. В. Н. Латышев. *К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр*. УМН, Т.27, Выпуск 4(166), 1972, 213–214.
61. В. Н. Латышев. *Нематричные многообразия нематричных алгебр*. М., Изд-во Моск. ун-та, 1977.
62. C. Schensted. *Longest increasing and decreasing subsequences*. Canad. J. Math 13, 1961, 179–191.
63. В. В. Щиголев. *Примеры бесконечно базлируемых T -идеалов*. Фундамент. и прикл. матем., 5:1 (1999), 307–312.
64. W. Specht. *Gesetze in Ringen. I*. Math. Z., 52:557–589, 1950.
65. M. V. Sapir. *Combinatorial algebra: syntax and semantics*. Springer, 2014.
66. S. A. Amitsur, J. Levitzki. *Minimal identities for algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. (2), 1950, 449–463.
67. F. Li, I. Tzameret. *Matrix identities and proof complexity lower bounds*. 2013.
68. A. A. Lopatin, I. P. Shestakov. *Associative nil-algebras over finite fields*. International Journal of Algebra and Computation, Vol. 23, No. 8(2013), 1881–1894.
69. В. А. Уфнаровский. *Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре*. ВИНТИ, 1989.
70. В. О. Бугаенко. *Обобщённая теорема Ван дер Вардена*. Москва, МЦНМО, 2006.
71. А. Я. Хинчин. *Три жемчужины теории чисел*. Москва, Наука, 1979.
72. А. А. Клячко. *Спецкурс по теории групп*. 2009.
73. А. И. Зимин. *Блокирующие множества термов*. Мат. сб., 1982, Т. 119(161), Ном. 3(11), 363–375.
74. A. Regev. *Existence of polynomial identities in $A \otimes_F B$* . Bull. Amer. Math. Soc. 77:6 (1971), 1067–1069.

- 75. А. Э. Фрид. *Введение в комбинаторику слов. Лекции*, 2011.
- 76. G. M. Bergman. *The Diamond Lemma for Ring Theory*. Advances in mathematics, 29, 178–218 (1978).
- 77. K. I. Beidar, W. S. Martindale III, A. V. Mikhalev. *Rings with generalized identities*. Pure and applied mathematics, 1995.
- 78. В. Н. Латышев. *ЕНС Прикладные проблемы алгебры*. 2012.
- 79. I. Kaplansky. *Rings with a polynomial identity*. Bull. Amer. Math. Soc., 54:575–580, 1948.
- 80. A. Regev. *Existence of polinomial identities in $A \otimes_F B$* . Bull. Amer. Math. Soc., 77:6 (1971), 1067–1069.
- 81. A. Thue. *Über unendliche Zeichenreihen*. Norske Vid. Selsk. Skr., I. Mat. Nat. Kl., Christiana, 7:1–22, 1906.
- 82. M. Morse. *Recurrent Geodesics on a Surface of Negative Curvature*. Trans. Amer. Math. Soc. 22, 84–100, 1921.
- 83. J. Berstel. *Mots sans carré et morphismes itérés*. Discrete Math., 29:235–244, 1979.
- 84. J. Berstel. *Sur les mots sans carré définis par un morphisme*. In A. Maurer, editor, ICALP, 16–25, Springer-Verlag, 1979.
- 85. M. Crochemore. *Sharp characterizations of square-free morphisms*. Theoret. Comput. Sci., 18:221–226, 1982.
- 86. wiki:en. *Rauzy fractal*.
- 87. wiki:ru. *Минимальная форма автомата*.
- 88. wiki:ru. *Диаграмма состояний (теория автоматов)*.